

II TINJAUAN PUSTAKA

2.1. Belanja *Online*

Belanja merupakan kegiatan bertukar uang dengan barang atau jasa yang dilakukan oleh pembeli dan penjual pada suatu waktu. Biasanya belanja dilakukan di pasar swalayan, pusat perbelanjaan dan belanja secara daring (*online*). Di era masyarakat yang modern ini belanja secara daring (*online*) merupakan hal yang lumrah dilakukan karena mudah dan efisien dibandingkan belanja langsung ke pasar swalayan dan pusat perbelanjaan. Dimana belanja secara daring (*online*) dapat dilakukan di mana saja baik di rumah, di kantor, di dalam transportasi umum dan lain-lain. Segala hal yang dibutuhkan dapat diperoleh dengan lengkap melalui belanja secara daring (*online*), produk-produk yang ditawarkan juga beragam. Dalam melakukan belanja secara online terdapat bermacam-macam toko *online* dimana diantaranya yaitu toko pakaian, peralatan olahraga, makanan, otomatis, dan masih banyak lagi. Toko *online* (*Online shop*) merupakan sarana atau toko untuk menawarkan barang dan jasa lewat internet sehingga pengunjung Toko *online* (*Online shop*) dapat melihat barang-barang secara daring (*online*) melalui komputer ataupun telepon pintar (*smartphone*) (Chacha, 2015).

Akibat terjadinya pandemi Covid-19 masyarakat dituntut untuk tetap berada di rumah dan melakukan semua kegiatan di rumah seperti bekerja, sekolah, dan lain-lain. Karena Covid-19 menyebar sangat cepat masyarakat juga takut untuk melakukan aktivitas di luar rumah dan berkontak langsung di luar rumah. Akibatnya dalam memenuhi kebutuhan sekunder maupun primer masyarakat lebih memilih untuk berbelanja secara daring (*Online Shopping*). Pandemi Covid-19 banyak mengubah tatanan kehidupan di masyarakat, salah satunya dalam hal belanja. Selama pandemi, minat masyarakat mengunjungi dan berbelanja daring atau online mendorong peningkatan nilai transaksi *e-commerce* (toko daring). Sepanjang tahun 2021, transaksi *e-commerce* tumbuh sebanyak 63,4 persen menjadi Rp.186,7 triliun. Menurut Bank Indonesia (BI) memperkirakan sampai dengan akhir tahun 2021 transaksi *e-commerce* akan meningkat sebanyak 48,4 persen selama tahun 2021 menjadi Rp395 triliun.

2.2. *Shopaholic*

Di era yang modern ini masyarakat menjadi lebih mudah dalam melakukan berbagai hal, salah satunya yaitu belanja. Belanja dapat dilakukan secara daring dimana masyarakat menjadi lebih mudah dan efisien dalam memenuhi kebutuhannya. Akibatnya masyarakat menjadi lebih konsumtif dalam berbelanja

dikarenakan mudah dan efisien. Konsumtif berkaitan erat dengan kata “*shopaholic*”, dimana *shopaholic* merupakan kata yang berasal dari “*shop*” yang artinya belanja dan “*aholic*” yang berarti bahwa kebiasaan yang ketergantungan terhadap hal yang dilakukan dengan sadar atau tidak. Seorang *shopaholic* biasanya melakukan kebiasaan ini tanpa disadari. Seseorang tersebut akan mengaku seolah suka dan merupakan pengkoleksi barang-barang tersebut. Namun sebenarnya hal tersebut merupakan gejala awal dari seorang pecandu belanja. Para ahli mengatakan bahwa 90 persen *shopaholic* merupakan perempuan, tetapi sebenarnya laki-laki juga dapat terjangkit penyakit ini. Sebagian besar laki-laki tidak mau mengakui, tetapi mereka beralih kebiasaan berbelanja ini hanya sebagai hobi untuk koleksi (Hasanuddin *et all.*, 2011).

2.3. Model Matematika

Model Matematika merupakan representasi matematika yang dihasilkan dari pemodelan Matematika. Pemodelan Matematika adalah suatu proses merepresentasikan dan menjelaskan suatu permasalahan dari dunia nyata ke dalam pernyataan matematis dengan menggunakan asumsi-asumsi tertentu (Symphorianus, 2016).

Menurut Vivi (2009), Syarat model yang baik, yaitu:

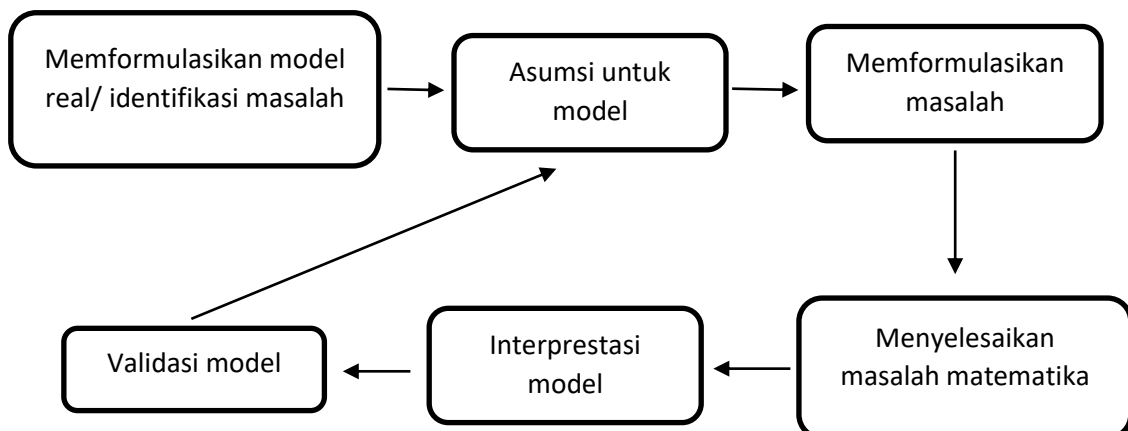
1. Representatif

Model mewakili dengan benar untuk sesuatu yang diwakili, makin mewakili maka model akan semakin kompleks.

2. Dapat dipahami/ dimanfaatkan

Model yang dibuat harus dapat dimanfaatkan atau dapat diselesaikan secara matematis, semakin sederhana maka akan semakin mudah diselesaikan.

Langkah- langkah dalam melakukan permodelan pada suatu masalah:



Gambar 1 Langkah-Langkah Memodelkan Suatu Masalah

Berdasarkan langkah-langkah melakukan permodelan pada **Gambar 1** dapat dilihat bahwa:

1. Identifikasi masalah

Maksudnya yaitu mampu memahami suatu masalah yang akan dirumuskan sehingga dapat tuliskan ke dalam Bahasa matematika.

2. Membuat asumsi

Yaitu dengan cara menyederhanakan banyaknya faktor yang berpengaruh terhadap suatu kejadian yang sedang diamati dengan cara mengasumsikan hubungan sederhana antara variabel. Asumsi-asumsi tersebut terbagi menjadi dua katagori utama, yaitu:

- a. Klasifikasi variabel

Mengidentifikasi variabel terhadap suatu hal yang dapat mempengaruhi tingkah laku pengamatan.

- b. Menentukan interlasi antara variabel yang terseleksi untuk dipelajari

Pemodel membuat suatu sub model sesuai dengan asumsi yang telah dibuat pada model tersebut, kemudian dipelajari secara terpisah pada satu atau lebih variabel bebas.

3. Menginterpretasikan model

Setelah model didapatkan maka langkah selanjutnya yaitu diselesaikan secara matematis, dalam hal ini model yang akan digunakan penyelesaiannya menggunakan persamaan diferensial. Apabila terdapat kesulitan dalam menginterpretasikan dan menyelesaikan model, maka kembali ke langkah 2 dengan membuat asumsi sederhana tambahan atau kembali ke langkah 1 untuk membuat definisi ulang dari permasalahan tersebut.

4. Validasi/ verifikasi model

Sebelum pemodel menyimpulkan hasil model berdasarkan kejadian dunia nyata, haruslah dilakukan uji model terlebih dahulu.

2.4. Persamaan Diferensial

Pada subbab sebelumnya dijelaskan bahwa dalam menyelesaikan suatu model digunakan persamaan diferensial, dimana diberikan definisi persamaan diferensial sebagai berikut.

Definisi 1. (Persamaan Diferensial)

Persamaan diferensial adalah suatu persamaan yang di dalamnya terdapat paling sedikit satu turunan atau lebih dari variabel terikat terhadap satu atau lebih variabel bebas pada suatu fungsi (Dwi, 2012).

Persamaan diferensial secara umum berdasarkan banyaknya variabel bebasnya terbagi menjadi dua, yaitu:

1. Persamaan Diferensial Biasa (*Ordinary Differential Equation*)

Persamaan diferensial biasa merupakan persamaaan diferensial yang hanya memiliki satu variabel bebas. Jika $y(x)$ adalah suatu fungsi satu variabel, maka x dinamakan variabel bebas dan y dinamakan variabel tak bebas. Bentuk umum dari persamaan diferensial biasa adalah:

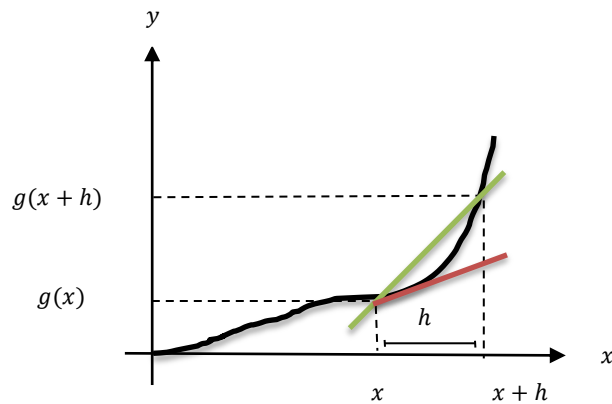
$$F(x, y, y', y'', \dots, y^n) = 0 \rightarrow \text{bentuk implisit}$$

$$y' = f(x, y) \rightarrow \text{bentuk eksplisit}$$

(Suherman dan Zamzami, 2020).

Definisi 2. (Turunan)

Berikut ini merupakan definisi turunan dengan ilustrasi difererensial



Gambar 2 Ilustrasi diferensial

Diketahui rumus gradien sebagai berikut:

$$\text{Gradien} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Gradien dari ilustrasi pada **Gambar 2** adalah:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

Dapat dilihat pada **Gambar 2** bahwa garis pada fungsi $f(x)$ yang dimiliki bukan merupakan garis lurus. Sehingga untuk menghasilkan nilai garis yang lebih akurat apabila nilai Δx lebih kecil.

$$\begin{aligned}\frac{\Delta y}{\Delta x} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\ \frac{dy}{dx} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}\end{aligned}\tag{2.1}$$

Sehingga persamaan (2.1) disebut sebagai definisi turunan (Victor et all, 2013).

Contoh 2.2

Carilah turunan dari $g(x) = 3x^2 + 5$

$$\begin{aligned}g'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3(x+h)^2 + 5 - (3x^2 + 5)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3x^2 + 6hx + 3h^2 + 5 - 3x^2 - 5}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} 6x + 3h \\ &= 6x\end{aligned}$$

Maka hasil turunan dari $g(x) = 3x^2 + 5$ adalah $6x$.

Teorema 1 (Aturan Turunan)

Jika $g(x) = x^n, g'(x) = nx^{n-1}$

Bukti:

Digunakan ekspansi binomial untuk menyelesaikan definisi turunan di persamaan (2.1), sehingga dapat diselsaikan sebagai berikut

$$\begin{aligned}g'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h)^n - g(x)^n}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x^n + nx^{n-1}h + \dots + h^n) - x^n}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{nx^{n-1}h + \dots + h^n}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(nx^{n-1} + \dots + h^{n-1})}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (nx^{n-1} + \dots + h^{n-1}) \\ &= nx^{n-1} + \dots + 0^{n-1} \\ &= nx^{n-1}\end{aligned}$$

$\therefore$ Maka terbukti bahwa turunan dari $g(x) = x^n$ adalah $g'(x) = nx^{n-1}$.

(Victor et al, 2013)

2. Persamaan Diferensial Parsial (*Partial Differential Equation*)

Persamaan diferensial parsial adalah persamaan diferensial yang memuat lebih dari satu variabel bebas. Bentuk umum dari persamaan diferensial parsial adalah:

$$g(x, y, \dots, u, u_x, u_y, \dots, u_{xx}, u_{yy}, \dots) = 0$$

Dengan $x, y, \dots$, merupakan variabel bebas dan u merupakan variabel tak bebas yang bergantung pada variabel bebas $x, y, \dots$, serta $u, u_x, u_y, \dots, u_{xx}, u_{yy}, \dots$ merupakan turunan parsial dari u . Diantara interpretasi dari turunan parsial pada bentuk umum itu adalah

$$u_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u_{xy} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$$

Persamaan diferensial parsial ini digunakan pada penelitian ini untuk menentukan matriks jacobian pada analisis kestabilan titik ekuilibrium.

Contoh 2.3

Selsaikan persamaan diferensial dari

$$3 \frac{\partial u}{\partial x} + 2 \frac{\partial u}{\partial y} = 0, u(x, 0) = 4e^{-x}$$

Misalkan $u(x, y) = e^{ax+by}$

Maka

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= ae^{ax+by} \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= be^{ax+by} \end{aligned}$$

Sehingga PD menjadi

$$3ae^{ax+by} + 2be^{ax+by} = 0$$

$$e^{ax+by}(3a + 2b) = 0$$

$$3a + 2b = 0$$

$$2b = -3a$$

$$b = -\frac{3}{2}a$$

Penyelsaian umum PD

$$u(x, y) = e^{ax+by}$$

$$= e^{ax - \frac{3}{2}ay}$$

$$= e^{a(x - \frac{3}{2}y)}$$

$$= F\left(x - \frac{3}{2}y\right)$$

Syarat batas: $u(x, 0) = 4e^{-x}$

Substitusi ke penyelesaian umum PD, sehingga

$$\begin{aligned}u(x, 0) &= F\left(x - \frac{3}{2}(0)\right) \\&= F(x) = 4e^{-x}\end{aligned}$$

Jadi penyelesaian PD:

$$u(x, y) = 4e^{-x - \frac{3}{2}y}$$

Orde dari persamaan diferensial ditentukan oleh tingkat tertinggi dari turunan yang terdapat didalamnya. Sedangkan derajat dari persamaan diferensial ditentukan oleh pangkat tertinggi dari orde turunan

Bentuk Persamaan Diferensial orde n:

$$y^{(n)} = g(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}) \quad (2.1)$$

Dimana orde persamaan diferensial menyatakan adanya keterkaitan antara peubah bebas x dan peubah tak bebas y beserta turunan-turunannya kedalam bentuk persamaan yang identik nol.

Contoh 2.3 Persamaan Diferensial dengan nilai orde dan derajat:

- | | |
|--|--|
| a. $y' = \sin x + \cos x$ | : Persamaan diferensial biasa orde satu derajat satu |
| b. $y'' + 3y' - 4y = 0$ | : Persamaan diferensial biasa orde dua derajat satu |
| c. $y''' - e^x y'' - yy' = (x^2 + 1)y^2$ | : Persamaan diferensial biasa orde tiga derajat satu |
| d. $(y'')^2 + (y')^3 + 3y = x^2$ | : Persamaan diferensial biasa orde dua derajat dua |
| e. $\frac{d^2y}{dx^2} + 4\frac{dy}{dx} + 7y = 0$ | : Persamaan diferensial linear orde dua derajat satu |
| f. $\frac{d^2y}{dx^4} + x\frac{dy}{dx} = 0$ | : Persamaan diferensial linear orde empat derajat satu |

(Rulie, 2021).

2.5. Persamaan Otonomus

Pada persamaan diferensial terdapat dua bentuk persamaan diferensial, yaitu persamaan diferensial autonomous dan persamaan diferensial non-autonomous.

$$\frac{dx}{dt} = g(x) \quad (2.2)$$

$$(2.3)$$

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t)$$

Pada persamaan (2.2) merupakan persamaan diferensial autonomous mana pada persamaan tersebut hanya bergantung pada satu variabel x dan persamaan (2.3) merupakan persamaan diferensial non-autonomous yang bergantung pada variabel x dan t (Meksianis, 2018).

2.6. Sistem Persamaan Diferensial

Persamaan diferensial sering muncul dalam melakukan permodelan matematika dimana pada model matematika mencoba untuk menggambarkan keadaan kehidupan nyata. Terdapat banyak hukum-hukum alam dan hipotesa-hipotesa yang dapat diterjemahkan ke dalam persamaan yang mengandung suatu turunan dengan Bahasa Matematika. Berikut merupakan definisi sistem persamaan diferensial yang akan digunakan dalam model matematika.

Definisi 3. (Sistem Persamaan Diferensial)

Sistem persamaan diferensial merupakan suatu sistem yang memiliki n buah persamaan diferensial, dengan n buah fungsi yang tidak diketahui, dimana n merupakan bilangan bulat positif lebih besar sama dengan 2. Antara persamaan diferensial yang satu dengan yang lain saling berkaitan dan konsisten (Vivi, 2009).

Bentuk umum dari suatu sistem persamaan diferensial orde satu yang memuat n persamaan adalah sebagai berikut:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{g}(t, \mathbf{x}) = \frac{d\mathbf{x}}{dt} \quad (2.4)$$

Dengan

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \dot{\mathbf{x}} = \frac{d\mathbf{x}}{dt},$$

Sehingga persamaan (2.4), dituliskan

$$\frac{dx_1}{dt} = g_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = g_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$\vdots$

$$\frac{dx_n}{dt} = g_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (2.5)$$

(Vivi, 2009)

Pada persamaan (2.5), $x_1, x_2, \dots, x_n$ adalah variabel tak bebas yang bergantung pada variabel bebas t , sehingga $x_1 = x_1(t), x_2 = x_2(t), \dots, x_n = x_n(t)$, dimana $\frac{dx_i}{dt}$ merupakan *derivative* fungsi x_i terhadap t , dan g_i adalah fungsi yang bergantung pada variabel $x_1, x_2, \dots, x_n$ dan t . Jika pada persamaan (2.2) variabel t tidak dinyatakan secara eksplisit, maka sistem tersebut merupakan sistem autonomous, dapat ditulis menjadi :

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}) \quad (2.6)$$

Dengan

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} g_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ g_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ g_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \end{pmatrix}$$

Sistem (2.6) adalah sistem persamaan diferensial dengan variabel bebas yang implisit dan $\mathbf{x}$ adalah variabel tak bebas yang merupakan fungsi dalam t . Sistem (2.6) dapat dituliskan kembali menjadi.

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= g_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \frac{dx_2}{dt} &= g_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= g_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{aligned} \quad (2.7)$$

Jika pada sistem (2.6), fungsi $g_i, \forall i = 1, 2, \dots, n$ merupakan suatu fungsi linear, maka sistem tersebut disebut sebagai sistem persamaan diferensial linier. Jika tidak demikian, maka sistem tersebut adalah sistem persamaan diferensial nonlinier (Vivi, 2009).

1. Sistem Persamaan Diferensial Linier

Pada sistem persamaan diferensial terdapat sistem persamaan diferensial linear dan sistem persamaan diferensial nonlinear. Berikut merupakan bentuk umum sistem persamaan diferensial linear order 1 adalah sebagai berikut :

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1(t) &= a_{11}(t)x_1(t) + a_{12}(t)x_2(t) + \cdots + a_{1n}(t)x_n(t) + g_1(t) \\
\dot{x}_2(t) &= a_{21}(t)x_1(t) + a_{22}(t)x_2(t) + \cdots + a_{2n}(t)x_n(t) + g_2(t) \\
&\vdots \\
\dot{x}_n(t) &= a_{n1}(t)x_1(t) + a_{n2}(t)x_2(t) + \cdots + a_{nn}(t)x_n(t) + g_n(t)
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Sistem (2.8) dapat dituliskan dalam bentuk matriks

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \cdots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g_1(t) \\ g_2(t) \\ \vdots \\ g_n(t) \end{pmatrix}$$

Atau

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{g}(t) \tag{2.9}$$

Jika $g(t) = 0$, maka sistem (2.9) dikatakan homogen dan dapat ditulis

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) \tag{2.10}$$

Jika koefisien pada sistem merupakan konstanta yang bernilai riil, maka sistem tersebut dapat ditulis dalam bentuk

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Atau

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x} \tag{2.11}$$

(Steven, 2001).

2. Sistem Persamaan Diferensial Non Linier

Sistem persamaan diferensial non linier merupakan sistem persamaan yang tak linear jika pada suatu sistem terdapat variabel tak bebas dan derivative berderajat lebih dari satu dan terdapat perkalian antara variabel tak bebas dan variabel bebasnya.

Contoh

$$\frac{dx}{dt} = x - xy$$

$$\frac{dy}{dt} = 2y - x - x^2$$

Sistem persamaan di atas merupakan sistem persamaan non linier dengan variabel bebas t dan variabel tak bebas x dan y . sistem persamaan di atas disebut sistem

persamaan non linier karena memuat perkalian antara variabel tak bebas x dan y serta terdapat kuadrat pada variabel tak bebas x (Lasker, et all, 2021).

2.7. Nilai Eigen dan Vektor Eigen

Definisi 4 (Nilai Eigen dan Vektor Eigen)

Jika A merupakan matriks $n \times n$, maka vector tidak nol x pada $\mathbb{R}^n$ disebut dengan vector eigen untuk A jika Ax merupakan kelipatan skalar dari x ; maka,

$$Ax = \lambda x$$

untuk suatu skalar λ . Skalar λ disebut sebagai nilai eigen dari A , dan x dikatakan sebagai vektor eigen λ . Persamaan $Ax = \lambda x$ dapat dituliskan $Ax = \lambda Ix$, atau ekuivalen dengan,

$$(\lambda I - A)x = 0$$

Suatu λ disebut nilai eigen dari matriks A jika persamaan $(\lambda I - A)x = 0$ memiliki solusi $x \neq 0$. Sehingga untuk menemukan nilai eigen dari matriks A , maka haruslah determinan dari $\lambda I - A$ bernilai 0. Oleh karena itu, untuk menemukan nilai eigen dari matriks A , maka perlu ditemukan λ yang merupakan solusi dari

$$|\lambda I - A| = 0$$

Selanjutnya, persamaan $|\lambda I - A| = 0$ disebut persamaan karakteristik dari matriks A (Anton, H, 2014).

Contoh 2.5 Mencari Nilai Eigen

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$$

Digunakan persamaan karakteristik untuk mencari semua nilai eigen pada matriks di atas.

Menggunakan $(\lambda I - A)x = 0$, dapat ditulis

$$\begin{vmatrix} \lambda - 3 & 0 \\ -8 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = 0$$

Maka diperoleh

$$(\lambda - 3)(\lambda + 3) = 0$$

$$\lambda = 3 \text{ dan } \lambda = -1$$

Dapat dilihat bahwa nilai eigen dari A adalah $\lambda = 3$ dan $\lambda = -1$ (Anton, H, 2014).

2.8. Titik Ekuilibrium (Keseimbangan)

Berikut ini merupakan definisi dari titik ekuilibrium yang akan digunakan untuk menyelesaikan suatu model matematika.

Definisi 4. (Titik Kesetimbangan)

Diberikan sistem autonomous

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{g}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \quad (2.12)$$

Titik $\bar{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$ disebut titik ekuilibrium dari persamaan (2.12) jika

$$\mathbf{g}(\bar{\mathbf{x}}) = 0$$

Contoh

Akan dicari titik ekuilibrium dari sistem

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= x_1 - 2x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} &= x_1 + x_1x_2 \end{aligned}$$

Misal $g_1 = x_1 - 2x_2$

$$g_2 = x_1 + x_1x_2$$

Akan dicari $\bar{x}_1$ dan $\bar{x}_2$ sedemikian sehingga

$$g_1(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = 0 \text{ dan } g_2(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = 0$$

untuk $g_2 = 0$ diperoleh

$$x_1 + x_1x_2 = 0$$

$$x_1(1 + x_2) = 0$$

$$x_1 = 0 \vee x_2 = -1$$

Substitusi $x_1 = 0$ ke dalam $g_1 = 0$, maka $x_2 = 0$ dan substitusikan $x_2 = -1$ ke dalam $g_1 = 0$, maka diperoleh $x_1 = -2$. Sehingga sistem pada persamaan diferensial memiliki dua titik ekuilibrium yaitu: $\bar{x}_1 = (0,0)$ dan $\bar{x}_2 = (-2,-1)$ (Ratnasari, 2014).

Titik ekuilibrium terbagi menjadi:

1. Titik Ekuilibrium Bebas Penyakit

Titik ekuilibrium bebas penyakit akan diperoleh jika $E = I = 0$, sehingga diperoleh suatu keadaan bahwa semua individu masuk ke subpopulasi *Susceptible* (S) dan atau *Recovered* (R) dimana tidak ada individu yang menularkan ataupun terinfeksi suatu penyakit.

2. Titik Ekuilibrium Endemik

Titik ekuilibrium endemik merupakan kondisi yang menggambarkan bahwa suatu penyakit akan selalu ada dalam suatu populasi yang berarti akan selalu terdapat individu yang terinfeksi penyakit.

2.9. Kestabilan Titik Ekuilibrium (Kesetimbangan)

Diberikan definisi kestabilan titik ekuilibrium dalam menyelesaikan suatu model matematika.

Definisi 5. (Kestabilan Titik Ekuilibrium)

Misalkan titik $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ adalah titik ekuilibrium dari suatu persamaan diferensial dengan x_0 adalah titik awal, maka titik $\bar{x}$ dikatakan:

- Stabil, jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta(\varepsilon) > 0$ sedemikian sehingga untuk setiap $x_0 \in \mathbb{R}^n$ dengan $\|x_0 - \bar{x}\| < \delta(\varepsilon)$, solusi $\varphi(t, x_0)$ dari persamaan $\dot{x} = g(x)$ yang melalui x_0 saat $t = t_0$ dan memenuhi $\|\varphi(t, x_0) - \bar{x}\| < \varepsilon$ untuk setiap $t \geq 0$.
- Tidak stabil, jika $\bar{x}$ tidak memenuhi kriteria a).
- Stabil asimtotik, jika $\bar{x}$ stabil, dan terdapat $r > 0$ dimana $0 < r < \delta$, sedemikian sehingga jika $t \rightarrow \infty$, maka $\|\varphi(t, x_0) - \bar{x}\| \rightarrow 0$ untuk setiap $x_0 \in \mathbb{R}^n$ yang memenuhi $\|x_0 - \bar{x}\| < r$ (Hale dan Kocak, 1991).

Untuk menganalisa kestabilan titik ekuilibrium dari persamaan (2.11), akan ditentukan terlebih dahulu nilai eigen dari matriks A, yang dilambangkan dengan λ . Nilai eigen tersebut adalah solusi dari persamaan karakteristik

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

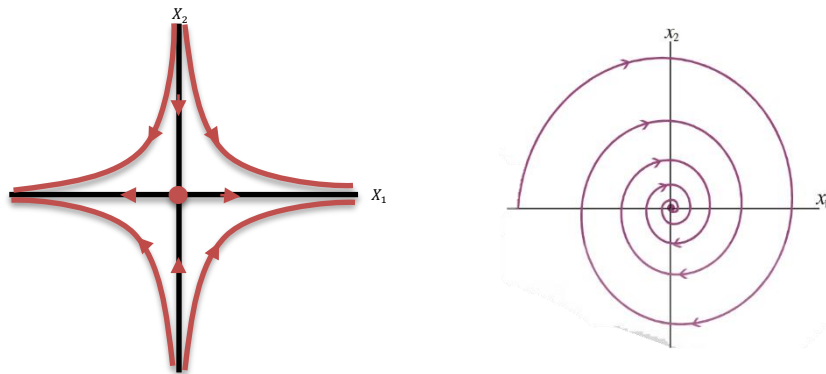
Atau

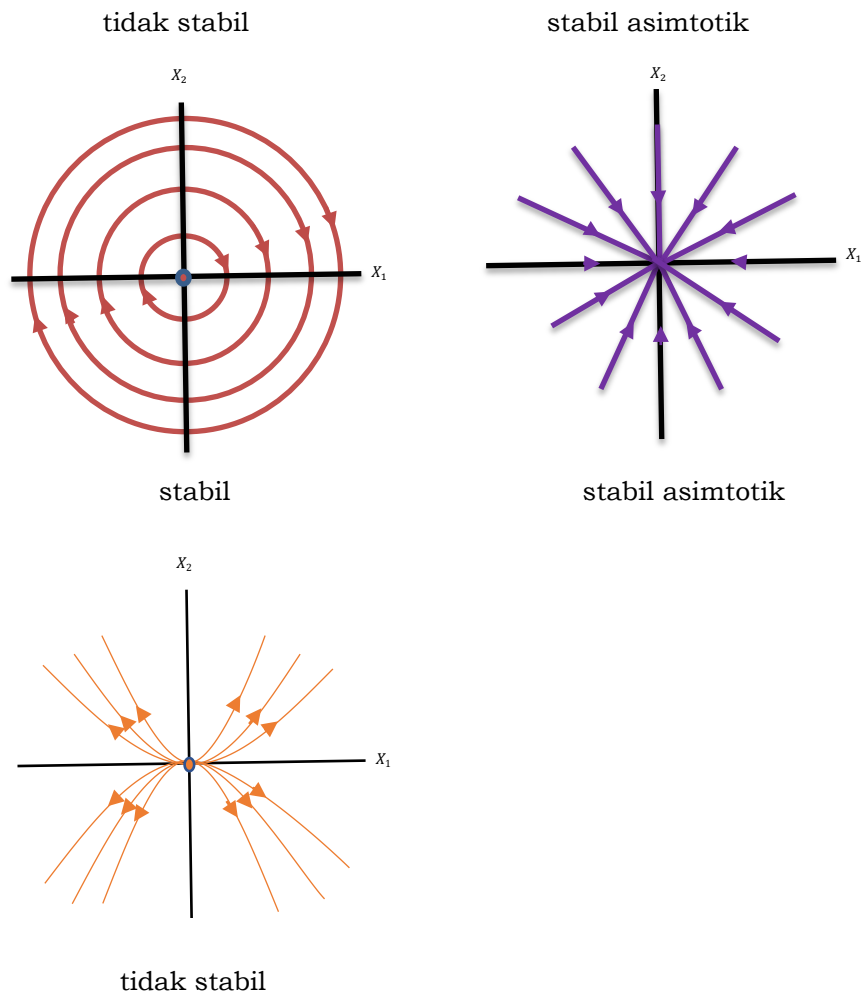
$$a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0 = 0$$

Dengan $a_0, a_1, \dots, a_n$ adalah konstanta.

Nilai-nilai eigen tersebut digunakan untuk menentukan kestabilan titik ekuilibrium.

Berikut ini merupakan bentuk-bentuk klasifikasi kestabilan titik ekuilibrium.





Gambar 3 Klasifikasi Kestabilan Titik Ekuilibrium

Berdasarkan pada **Gambar 3** dapat dilihat bahwa stabil merupakan suatu kondisi dimana semua solusi hanya akan dekat di sekitar titik ekuilibriumnya saja, kemudian akan dikatakan stabil asimtotik jika semua solusinya sangat mendekati atau menuju titik ekuilibriumnya, dan akan dikatakan tidak stabil apabila solusinya menjauhi titik ekuilibrium.

2.10. Linearisasi

Pendekatan linear untuk sistem nonlinear disebut sebagai linearisasi. Linierisasi dilakukan untuk menganalisis sistem nonlinier dengan cara menganalisis perilaku sistem disekitar titik ekuilibriumnya (Salmah, 2021).

Diberikan suatu sistem persamaan diferensial nonlinear

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{g}(\mathbf{x}) \quad (2.13)$$

Dengan $x \in L \subseteq \mathbb{R}^n$, $g: L \rightarrow \mathbb{R}^n$. Misal $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$ merupakan titik ekuilibrium dari suatu sistem $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{g}(\mathbf{x})$. Deret Taylor dari g disekitar titik ekuilibriumnya adalah :

$$\begin{aligned} g_1(x_1, x_2, \dots, x_n) &\cong g_1(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) + \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)(x_1 - \bar{x}_1) + \dots + \frac{\partial g_1}{\partial x_n}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)(x_n - \bar{x}_n) + R_{g1} \\ g_2(x_1, x_2, \dots, x_n) &\cong g_2(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) + \frac{\partial g_2}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)(x_1 - \bar{x}_1) + \dots + \frac{\partial g_2}{\partial x_n}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)(x_n - \bar{x}_n) + R_{g2} \\ &\vdots \\ g_n(x_1, x_2, \dots, x_n) &\cong g_n(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) + \frac{\partial g_n}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)(x_1 - \bar{x}_1) + \dots + \frac{\partial g_n}{\partial x_n}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)(x_n - \bar{x}_n) + R_{gn} \end{aligned} \quad (2.14)$$

Pendekatan linear untuk sistem (2.14) adalah:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 = g_1(x_1, x_2, \dots, x_n) &\cong g_1(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) + \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)(x_1 - \bar{x}_1) + \dots + \frac{\partial g_1}{\partial x_n}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)(x_n - \bar{x}_n) + R_{g1} \\ \dot{x}_2 = g_2(x_1, x_2, \dots, x_n) &\cong g_2(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) + \frac{\partial g_2}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)(x_1 - \bar{x}_1) + \dots + \frac{\partial g_2}{\partial x_n}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)(x_n - \bar{x}_n) + R_{g2} \\ &\vdots \\ \dot{x}_n = g_n(x_1, x_2, \dots, x_n) &\cong g_n(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) + \frac{\partial g_n}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)(x_1 - \bar{x}_1) + \dots + \frac{\partial g_n}{\partial x_n}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)(x_n - \bar{x}_n) + R_{gn} \end{aligned} \quad (2.15)$$

(Salmah, 2021).

Dengan $R_{g1}, R_{g2}, \dots, R_{gn}$ merupakan bagian nonlinear yang selanjutnya diabaikan karena nilai $R_{g1}, R_{g2}, \dots, R_{gn}$ mendekati nol. Sistem (2.15) dapat dituliskan dalam bentuk matriks.

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) & \frac{\partial g_1}{\partial x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) & \frac{\partial g_2}{\partial x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) & \dots & \frac{\partial g_2}{\partial x_n}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial g_n}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) & \frac{\partial g_n}{\partial x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) & \dots & \frac{\partial g_n}{\partial x_n}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (x_1 - \bar{x}_1) \\ (x_2 - \bar{x}_2) \\ \vdots \\ (x_n - \bar{x}_n) \end{pmatrix}$$

Dimisalkan $y_1 = x_1 - \bar{x}_1$, $y_2 = x_2 - \bar{x}_2$, ..., $y_n = x_n - \bar{x}_n$ sehingga $\dot{y}_1 = \dot{x}_1, \dot{y}_2 = \dot{x}_2, \dots, \dot{y}_n = \dot{x}_n$, maka diperoleh:

$$\begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \vdots \\ \dot{y}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) & \frac{\partial g_1}{\partial x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) & \frac{\partial g_2}{\partial x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) & \dots & \frac{\partial g_2}{\partial x_n}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial g_n}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) & \frac{\partial g_n}{\partial x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) & \dots & \frac{\partial g_n}{\partial x_n}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$\text{Dengan } J = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) & \frac{\partial g_1}{\partial x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) & \frac{\partial g_2}{\partial x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) & \dots & \frac{\partial g_2}{\partial x_n}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial g_n}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) & \frac{\partial g_n}{\partial x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) & \dots & \frac{\partial g_n}{\partial x_n}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) \end{pmatrix}$$

yang disebut dengan matriks Jacobian pada titik ekuilibrium $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$ (Salmah, 2021).

2.11. Basic Reproduction Number (R_0)

Bilangan reproduksi dasar R_0 adalah jumlah individu baru terinfeksi yang dihasilkan oleh adanya kontak langsung maupun tidak langsung dengan satu individu terinfeksi dalam suatu populasi, yang merupakan parameter ambang batas yang digunakan untuk memprediksi apakah suatu penyakit akan habis atau terus ada. dapat diperoleh dengan menentukan nilai eigen dari matriks jacobian yang didapat dari titik kesetimbangan bebas penyakit dan titik kesetimbangan endemik (Sitty et all, 2020).

Menurut Diekmann, Heesterbeek, dan Roberts (2009), Menghitung nilai R_0 dimulai dengan mengambil persamaan-persamaan dari sistem PDB yang menggambarkan kasus infeksi baru dan perubahan dalam kompartemen infeksi. Persamaan-persamaan diferensial yang demikian dinyatakan sebagai subsistem infeksi. Kemudian subsistem infeksi tersebut dilinearkan disekitar titik keseimbangan bebas penyakit yang dinyatakan dalam bentuk matriks, yang pada umumnya disebut dengan matriks Jacobian. Langkah-langkah untuk menemukan R_0 dengan menggunakan NGM (*Next Generation Matrices*) *with large domain* adalah sebagai berikut.

- Mendekomposisikan matriks jacobian dari subsistem infeksi sebagai $F + V$ dengan F merupakan matriks transmisi, yang elemen-elemennya berhubungan dengan proses penularan infeksi. Elemen F_{ij} merupakan laju sedemikian sehingga individu-individu pada kompartemen infeksi j menyebabkan munculnya individu-individu pada kompartemen i . Sedangkan V merupakan matriks transisi, yang elemennya berhubungan dengan perpindahan kompartemen (termasuk kematian),
- Menemukan NGM (*Next Generation Matrices*) *with large domain*, yang dinotasikan dengan K_L , yaitu $K_L = -FV^{-1}$,
- Menemukan nilai eigen dominan dari matriks K_L dan selanjutnya nilai eigen dominan tersebut dinyatakan sebagai R_0 .

(Diekmann, Heesterbeek, dan Roberts, 2009).

Bilangan reproduksi dasar (R_0) dapat ditentukan dengan menggunakan metode *Next Generation Matrices* (NGM). *Next Generation Matrices* (NGM) adalah basis untuk mendefinisikan nilai R_0 . Sebelum menghitung bilangan reproduksi dasar (R_0) dilakukan linearisasi dari sistem persamaan diferensial yang didekati pada titik kesetimbangan bebas penyakit. Persamaan kelompok populasi terinfeksi yang telah dilinearisasi dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\dot{x} = (F + V)x$$

R_0 didefinisikan sebagai radius spektral atau nilai eigen dari matriks generasi selanjutnya dengan notasi K_L :

$$K_L = -FV^{-1}$$

Sehingga nilai reproduksi dasarnya yaitu,

$$R_0 = \rho(-FV^{-1})$$

Dengan :

K_L = *Next Generation Matrices* (NGM)

F = Matriks transmisi (matriks yang memuat laju infeksi individu baru kontak dengan individu terinfeksi)

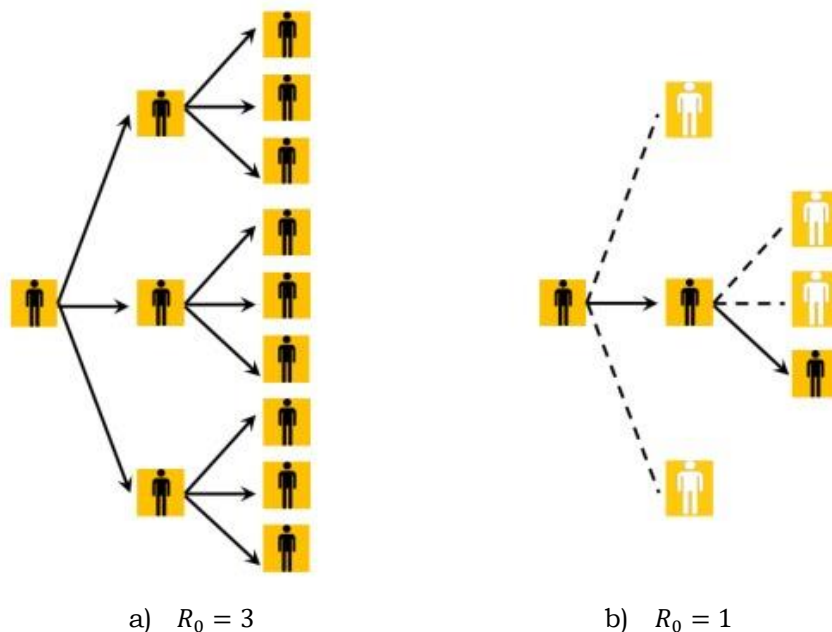
V = Matriks transisi (matriks yang memuat laju transfer masuk dan keluar pada subpopulasi terinfeksi)

(Sitty et al, 2020).

Teorema 4 (*Basic Reproduction Number*)

1. Jika $R_0 < 1$ maka sistem hanya mempunyai titik kesetimbangan bebas penyakit yang stabil asimtotik lokal.
2. Jika $R_0 > 1$ maka sistem memiliki dua titik kesetimbangan yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit yang tidak stabil dan titik kesetimbangan endemik yang stabil asimtotik lokal.

(Mandal et al., 2011).



Gambar 4 Ilustrasi Keadaan Endemik Terhadap Penyakit Berdasarkan Nilai R_0

Gambar 4 Merupakan contoh ilustrasi keadaan endemik pada suatu populasi terhadap suatu penyakit berdasarkan nilai R_0 , dengan garis penuh menunjukkan terjadi penularan penyakit, sedangkan garis putus-putus menunjukkan tidak terjadi penularan penyakit.

2.12. Analisis Sensitivitas

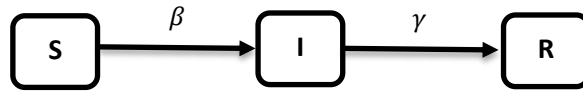
Pada umumnya, nilai parameter pada model matematika sangat tidak pasti. Hal ini terjadi karena ketiadaan data atau data yang didapatkan tidak lengkap. Oleh karena itu, analisis ketidakpastian sangat penting dilakukan untuk dapat menentukan parameter yang berpengaruh dalam model matematika (Meksianis, 2018).

2.13. Model Epidemik SIR

Salah satu model epidemik yang digunakan dalam menyelesaikan suatu permasalahan di kehidupan nyata menggunakan Bahasa matematika yaitu model SIR. Model SIR pertama kali diperkenalkan oleh Kermack dan McKendrick pada tahun 1927. Model ini digunakan oleh Hethcote pada 1989 untuk menjelaskan penyebaran penyakit campak, cacar air, difteri, polio, dan batuk rejan (Karmila, 2020).

Model SIR merupakan model yang dikenal dengan model SIR (*Susceptible*, *Infected*, dan *recovered*) dimana pada model ini membagi populasi ke dalam tiga kelompok, yaitu *susceptible* (populasi yang sehat, tetapi rentan terinfeksi penyakit), *infected* (populasi yang terinfeksi penyakit), dan *recovered* (populasi yang sembuh dari penyakit) (Julia, et all, 2020).

Individu yang rentan terserang penyakit apabila berinteraksi dengan individu yang teinfeksi dengan laju β dan individu yang berpotensi akan sembuh dengan laju γ . Skema untuk model kompartemen tersebut adalah:



Gambar 5 Bagan Kompartemen SIR

Berdasarkan asumsi, maka diperoleh model epidemik sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 \frac{dS}{dt} &= \beta SI, \\
 \frac{dI}{dt} &= \beta SI - \gamma I, \\
 \frac{dR}{dt} &= \gamma I,
 \end{aligned}
 \tag{2.16}$$

Dengan $S(t) + I(t) + R(t) = N$. Titik kesetimbangan bebas penyakit untuk sistem (2.16) adalah $(S_0, 0, 0)$. Untuk mengetahui keendemikan penyakit pada suatu populasi, sapat dianalisis melalui besaran *Basic Reproduction Number* (R_0).

Subsistem infeksi untuk sistem (2.14) adalah

$$\frac{dI}{dt} = \beta SI - \gamma I$$

Akibatnya diperoleh $T = \beta S$ dan $\Sigma = -\gamma$, sehingga

$$K_L = -T\Sigma^{-1} = \frac{\beta S}{\gamma}$$

Dengan demikian maka untuk sistem (2.14) diperoleh

$$R_0 = \frac{\beta S}{\gamma}$$

(Diekmann, Heesterbeek, 2000).

2.14. Penelitian Terdahulu

Penelitian terdahulu merupakan perbandingan dan acuan untuk menghindari anggapan kesamaan dengan penelitian yang akan dilakukan. Terdapat beberapa penelitian terdahulu yang menjadi panduan dan acuan dalam pembuatan skripsi

ini. Antara lain yaitu hasil penelitian yang dilakukan oleh Karmila Palalu (2020) dengan judul "*Model Matematika Pada Perilaku Fanatisme Fans Korean Pop*", Indah Pertiwi dkk (2020) dengan judul "*Analisis Perilaku Model SIR Tanpa Dan Dengan Vaksinasi. Jurnal Ilmu Matematika dan Terapan*", dan Ratnasari Dwi Ambarwati (2014) "*Analisis Model Matematika Tentang Pengaruh Terapi Gen Terhadap Dinamika Pertumbuhan Sel Efektor Dan Sel Tumor Dalam Pengobatan Kanker*".