

**MODEL SVEIR PENYEBARAN PENYAKIT CORONA
VIRUS DISEASE 2019 (COVID-19) PADA KASUS
PENGUNAAN VAKSINASI DI INDONESIA**

S K R I P S I



**KHELFIEN RAHMANDA PUTRA
F1C218016**

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA
JURUSAN MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM**

**FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS JAMBI
2022**

HALAMAN PERNYATAAN

Dengan ini saya menyatakan bahwa skripsi ini benar-benar karya sendiri. Sepanjang pengetahuan saya tidak terdapat karya atau pendapat yang ditulis atau diterbitkan orang lain kecuali sebagai acuan atau kutipan dengan mengikuti tata penulisan karya ilmiah yang lazim.

Tanda tangan yang tertera dalam halaman pengesahan adalah asli. Jika tidak asli, saya siap menerima sanksi sesuai dengan peraturan yang berlaku.

Jambi,
Yang Menyatakan

KHELFIEN RAHMANDA PUTRA
F1C218016

RINGKASAN

Covid-19 merupakan suatu penyakit menular yang disebabkan oleh corona virus jenis baru yang kemudian diberi nama secara medis adalah *Severe Acute Respiratory Syndrome Coronavirus 2*. Dikarenakan penyebaran virus Covid-19 yang terus meluas pemerintah Indonesia membuat peraturan yaitu melakukan pelaksanaan isolasi mandiri, karantina wilayah, wajib memakai masker, menjaga jarak dan menjauhi kerumunan, rajin mencuci tangan, serta melakukan vaksinasi. Pemberian vaksin Covid-19 bukan merupakan obat, tetapi penggunaan vaksin Covid-19 bertujuan untuk mendorong terbentuknya imunitas tubuh terhadap penyakit Covid-19 agar terhindar dari penyakit atau mengurangi gejala berat yang muncul apabila tertular. Dalam pelaksanaannya tak sedikit kendala yang dialami pemerintah untuk mencapai 70% penduduk Indonesia yang telah melakukan vaksinasi lengkap (telah mendapatkan dosis 1 dan 2) diantaranya banyaknya berita *hoax* mengenai vaksin Covid-19 yang beredar di masyarakat, ketidakpercayaan masyarakat terhadap adanya Covid-19, serta meragukan keefektifan dan keamanan penggunaan vaksin Covid-19, selain itu adanya masalah pungli untuk mendapatkan vaksinasi dan sertifikat palsu bagi yang telah melakukan vaksinasi.

Oleh sebab itu, perlu dilakukan analisis lebih mendalam untuk dapat menjelaskan penyebaran penyakit Covid-19 terhadap penggunaan vaksinasi di Indonesia. pada penelitian ini bertujuan untuk membentuk model *SVEIR* (*Susceptible, Vaksinasi, Exposed, Infected, Recovered*) pada penyebaran penyakit Covid-19 pada kasus penggunaan vaksinasi di Indonesia selanjutnya menentukan kestabilan titik ekuilibrium dan mengetahui kestabilan dari titik ekuilibrium dari model. Data yang akan dipakai pada penelitian ini merupakan data sekunder yang di dapat dari Badan Pusat Statistik Indonesia (BPS) dan Badan Komite Covid-19 Indonesia. Pada penelitian ini memiliki beberapa tahap dalam prosesnya yaitu dimulai dengan studi literatur dengan membaca dan memahami dari sumber-sumber baik berupa buku ataupun jurnal yang berkaitan mengenai penyakit Covid-19 dan yang berkaitan dengan model epidemik *SVEIR*, selanjutnya membuat asumsi, kemudian membuat model epidemik *SVEIR* pada penyebaran penyakit Covid-19 pada kasus penggunaan vaksinasi di Indonesia, mencari titik ekuilibrium serta menganalisis titik ekuilibrium, selanjutnya menentukan nilai *basic reproduction number*, kemudian melakukan simulasi hasil.

Berdasarkan penelitian yang telah dilakukan, diperoleh model epidemik *SVEIR* pada penyebaran penyakit Covid-19 dengan penggunaan vaksinasi serta diperoleh titik ekuilibrium bebas penyakit sebesar $E_0 = (0,9353272234, 0,009635395774, 0,0)$, dan titik ekuilibrium endemik diperoleh sebesar $E_1 = (0,470792199, 0,004837308413, 0,01211560449, 0,001970011633)$, dan *basic reproduction number* sebesar $(R_0) = 24,67955522$. Karena nilai $R_0 > 1$ maka model epidemik *SVEIR* mempunyai dua titik ekuilibrium adalah titik ekuilibrium bebas penyakit yang tidak stabil serta titik ekuilibrium endemik yang bersifat stabil asimtotik lokal. Artinya penyakit akan menyebar di dalam populasi atau akan terjadi pandemi didalam populasi.

SUMMARY

Covid-19 is an infectious disease caused by a new type of corona virus which is then given the medical name Severe Acute Respiratory Syndrome Coronavirus 2. Due to the spread of the Covid-19 virus which continues to expand, the Indonesian government makes regulations, namely implementing independent isolation, regional quarantine, must wear a mask, maintain distance and stay away from crowds, wash hands diligently, and vaccinate. Giving the Covid-19 vaccine is not a medicine, but the use of the Covid-19 vaccine aims to encourage the formation of body immunity against Covid-19 disease in order to avoid illness or reduce the severe symptoms that appear when infected. In its implementation, the government experienced several obstacles to reach 70% of Indonesia's population who had received complete vaccinations (had received doses 1 and 2), including the many hoax news about the Covid-19 vaccine circulating in the community, public distrust of the existence of Covid-19, and doubt the effectiveness and safety of using the Covid-19 vaccine, besides that there are problems of extortion to get vaccinations and fake certificates for those who have done the vaccination.

Therefore, it is necessary to carry out a more in-depth analysis to be able to explain the spread of the Covid-19 disease to the use of vaccinations in Indonesia. in this study aims to establish a SVEIR model (Susceptible, Vaccination, Exposed, Infected, Recovered) on the spread of Covid-19 disease in cases of vaccination use in Indonesia then determine the stability of the equilibrium point and determine the stability of the equilibrium point of the model. The data that will be used in this study is secondary data obtained from the Indonesian Central Statistics Agency (BPS) and the Indonesian Covid-19 Committee Agency. This research has several stages in the process, starting with a literature study by reading and understanding from sources in the form of books or journals related to the Covid-19 disease and those related to the SVEIR epidemic model, then making assumptions, then creating the SVEIR epidemic model. on the spread of Covid-19 disease in cases of vaccination use in Indonesia, looking for an equilibrium point and analyzing the equilibrium point, then determining the basic reproduction number value, then simulating the results.

Based on the research that has been done, the SVEIR epidemic model was obtained on the spread of Covid-19 disease with the use of vaccination and a disease-free equilibrium point was obtained at $E_0 = (0,9353272234, 0,009635395774, 0,0)$, and an endemic equilibrium point was obtained at $E_1 = (0,470792199, 0,004837308413, 0,01211560449, 0,001970011633)$, and the basic reproduction number is $(R_0) = 24,67955522$. Because the value of $R_0 > 1$, the SVEIR epidemic model has two equilibrium points, namely the unstable disease-free equilibrium point and the endemic equilibrium point which is locally asymptotically stable. This means that the disease will spread in the population or there will be a pandemic in the population.

**MODEL SVEIR PENYEBARAN PENYAKIT CORONA
VIRUS DISEASE 2019 (COVID-19) PADA KASUS
PENGUNAAN VAKSINASI DI INDONESIA**

S K R I P S I

Diajukan sebagai salah satu syarat dalam melakukan penelitian dalam
rangka penulisan Skripsi pada Program Studi Matematika



**KHELFIEN RAHMANDA PUTRA
F1C218016**

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA
JURUSAN MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM**

**FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS JAMBI
2022**

PENGESAHAN

Skripsi dengan Judul **MODEL SVEIR PENYEBARAN PENYAKIT CORONA VIRUS DISEASE 2019 (COVID-19) PADA KASUS PENGGUNAAN VAKSINASI DI INDONESIA** yang disusun oleh **KHELFIEN RAHMANDA PUTRA, NIM: F1C218016** telah dipertahankan di depan tim penguji pada tanggal dan dinyatakan lulus.

Susunan Tim Penguji:

Ketua	: Drs. Sufri, M.Si.
Sekretaris	: Niken Rarasati, S.Si., M.Si.
Anggota	: 1. Drs. Wardi Syafmen, M.Si. 2. Syamsyida Rozi, S.Si., M.Si. 3. Gusmanely. Z. S.Pd., M.Si.

Disetujui:

Pembimbing Utama

Pembimbing Pendamping

Drs. Sufri, M.Si.
NIP. 19597231985031007

Niken Rarasati, S.Si., M.Si.
NIP. 198901072019032013

Diketahui:

Dekan

Ketua Jurusan Matematika dan
Ilmu Pengetahuan Alam

Drs. Jefri Marzal, M.Sc., D.I.T.
NIP. 196806021993031004

Dr. Yusnaidar, S.Si., M.Si.
NIP. 196809241999032001

RIWAYAT HIDUP



Khelfien Rahmanda Putra lahir di Solok, pada tanggal 02 Agustus 2000. Penulis merupakan anak pertama dari tiga bersaudara, dari pasangan Jonaldi dan Pasrimurni. Jalur pendidikan yang formal yang ditempuh penulis adalah sebagai berikut:

1. TK Diniyah Rimbo Tengah, Kab. Muara Bungo tahun 2004-2006
2. SD Negeri 108 Kab. Muara Bungo tahun 2006-2012
3. SMP Negeri 2 Kota Solok tahun 2012-2015
4. SMA Negeri 3 Kota Solok tahun 2015-2018

Pada tahun 2018, penulis melanjutkan pendidikan di Universitas Jambi Fakultas Sains dan Teknologi Program Studi Matematika melalui jalur SBMPTN. Selama menempuh pendidikan S1, penulis cukup aktif di bidang akademik maupun organisasi. Penulis juga melaksanakan magang di PT. Bank Rakyat Indonesia Daerah Jambi. Selain itu, penulis juga aktif dalam mengikuti kegiatan seminar dan acara.

PRAKATA

Puji beserta syukur penulis haturkan kepada Allah SWT Tuhan yang Maha Esa yang telah mencurahkan rahmat dan karunia-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan penelitian dan Skripsi dengan judul **“MODEL SVEIR PENYEBARAN PENYAKIT CORONA VIRUS DISEASE 2019 (COVID-19) PADA KASUS PENGGUNAAN VAKSINASI DI INDONESIA”**. Shalawat dan Salam tidak luput penulis sampaikan kepada junjungan umat yaitu Nabi Muhammad SAW yang senantiasa syafa’at-Nya diharapkan di dunia dan di akhirat kelak.

Skripsi ini merupakan salah satu syarat yang harus diselesaikan untuk menyelesaikan Program S1 pada Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Jambi. Dalam penyelesaiannya tentu tidak terlepas dari bantuan berbagai pihak. Oleh sebab itu, pada kesempatan ini penulis mengucapkan terima kasih yang sebesar-besarnya dengan segala hormat dan kerendahan hati kepada:

1. Orang tua tercinta, Ayah Jonaldi dan Ibu Pasrimurni beserta keluarga yang telah banyak berkorban bagi penulis. Terima kasih atas do’a, cinta, kasih sayang, kesabaran, motivasi, semangat dan dukungan materil yang telah diberikan kepada penulis.
2. Drs. Jefri Marzal, M.Sc., D.I.T., selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Jambi.
3. Gusmi Kholijah, S.Si., M.Si., selaku Ketua Prodi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi.
4. Drs. Sufri, M.Si., selaku Dosen Pembimbing I yang banyak memberikan masukan ilmu, waktu dan pengarahan kepada penulis dalam penyusunan skripsi serta membantu terlaksananya seminar.
5. Niken Rarasati, S.Si., M.Si., selaku Dosen Pembimbing II dan juga pembimbing akademik, yang banyak memberikan masukan ilmu, waktu dan pengarahan kepada penulis dalam penyusunan skripsi serta membantu terlaksananya seminar.
6. Drs. Wardi Syafmen, M.Si., selaku penguji utama, Syamsyida Rozi, S.Si., M.Si. dan Gusmanely Z, S.Pd., M.Si., selaku penguji anggota dalam penyusunan skripsi ini.
7. Dosen Fakultas Sains dan Teknologi khususnya dosen Program Studi Matematika yang telah memberikan ilmu dan pendidikan kepada penulis selama di bangku kuliah.

8. Sahabat-sahabatku tercinta “Jomyt”, (Alfa, Dinda, Jevi, Mandah, Olpin, Raden) yang memberikan doa, dukungan, saran, semangat, hiburan dan motivasi kepada penulis.
9. Teman-teman seperjuangan Matematika angkatan 2018 atas saran, do’a, semangat, kekompakan, dan motivasinya.
10. Keluarga besar Himpunan Mahasiswa Matematika (HIMATIKA) Program Studi Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Jambi yang telah memberikan do’a dan bantuan kepada penulis.
11. Semua pihak yang telah banyak membantu dan tidak dapat disebutkan satu persatu. Terima kasih atas semuanya.

Semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi semua kalangan di masa yang akan datang. Penulis menyadari bahwa penyusunan skripsi ini masih jauh dari kata sempurna. Oleh karena itu, kritik dan saran ilmiah yang dapat membangun sangat penulis harapkan demi penyempurnaan skripsi ini.

Jambi,

KHELFIEN RAHMANDA PUTRA
F1C218016

DAFTAR ISI

PENGESAHAN	i
RIWAYAT HIDUP	ii
PRAKATA	iii
DAFTAR ISI.....	v
DAFTAR TABEL	vii
DAFTAR GAMBAR.....	viii
DAFTAR LAMPIRAN	ix
I. PENDAHULUAN	10
1.1. Latar Belakang	10
1.2. Rumusan Masalah	12
1.3. Batasan Masalah.....	12
1.4. Tujuan Penelitian	13
1.5. Manfaat Penelitian.....	13
II. TINJAUAN PUSTAKA	14
2.1. Covid-19	14
2.2. Model Matematika	16
2.3. Persamaan Diferensial	17
2.4. Persamaan Otonomus	22
2.5. Sistem Persamaan Diferensial.....	23
2.6. Titik Ekuilibrium	24
2.7. Linearisasi.....	25
2.8. Nilai Eigen dan Vektor Eigen.....	26
2.9. <i>Basic Reproduction Number</i>	26
2.10. Kestabilan Titik Ekuilibrium	28
2.11. Model Epidemik SEIR	29
2.12. Model Epidemik SVEIR.....	30
III. METODOLOGI PENELITIAN.....	32
3.1 Metode Penelitian	32
3.3 Diagram Alir Penelitian.....	36
IV. HASIL DAN PEMBAHASAN	38
4.1 Model SVEIR Pada Penyebaran Covid-19.....	38
4.2. Analisis Dinamik dari Model	41
4.2.1. Titik Ekuilibrium Bebas Penyakit.....	42
4.2.2. Basic Reproduction Number	43
4.2.3. Kestabilan Titik Ekuilibrium Bebas Penyakit	45

4.2.4.	Titik Ekuilibrium Endemik.....	49
4.2.5.	Kestabilan Titik Ekuilibrium Endemik.....	53
4.3.	Simulasi Numerik Model SVEIR.....	54
V.	KESIMPULAN DAN SARAN	66
5.1	Kesimpulan	66
5.2	Saran	67
	DAFTAR PUSTAKA	68
	LAMPIRAN	70

DAFTAR TABEL

Tabel 1. Daftar Variabel.....	33
Tabel 2. Daftar parameter.....	33
Tabel 3. Nilai-nilai Parameter titik ekuilibrium bebas penyakit sistem (4.1).....	56

DAFTAR GAMBAR

Gambar 1 Peta sebaran Covid-19	16
Gambar 2. Gambar Model Epidemik SEIR	29
Gambar 3. Gambar Model Epidemik SEIR	30
Gambar 4. Diagram Model Epidemik SVEIR.	35
Gambar 5. Diagram Alir Penelitian.	37
Gambar 6. Diagram Model Epidemik SVEIR.	38
Gambar 7. Simulasi sistem (4.1) menuju titik ekuilibrium endemik	60
Gambar 8. Simulasi titik I ketika $m = 0$	62
Gambar 9. Simulasi titik I ketika $m = 0,5$	62
Gambar 10. Simulasi titik I ketika $m = 0,78$	63
Gambar 12. Simulasi Titik I ketika $m = 1$	63
Gambar 13. Simulasi Sistem (4.1) Menuju Titik Ekuilibrium Bebas Penyakit. .	64

DAFTAR LAMPIRAN

Lampiran 1. Program Matlab Model Epidemik Pada Penyebaran Penyakit Covid-19 dengan $R_0 > 1$	70
Lampiran 2. Program Matlab Model Epidemik pada penyebaran Penyakit Covid-19 dengan $R_0 < 1$	70
Lampiran 3. Skrip Analisis Efektivitas Penggunaan Vaksin Terhadap Penyebaran Covid-19 ketika $m = 0$	71
Lampiran 4. Skrip Analisis Efektivitas Penggunaan Vaksin Terhadap Penyebaran Covid-19 Ketika $m = 0,5$	71
Lampiran 5. Skrip Analisis Efektivitas Penggunaan Vaksin Terhadap Penyebaran Covid-19 Ketika $m = 0,78$	72
Lampiran 6. Skrip Analisis Efektivitas Penggunaan Vaksin Terhadap Penyebaran Covid-19 Ketika $m = 1$	72

I. PENDAHULUAN

1.1. Latar Belakang

Penyakit merupakan suatu gangguan kesehatan yang dapat terjadi karena beberapa faktor antara lain karena keturunan, kekurangan gizi, kecelakaan, bakteri, dan virus. Terdapat dua jenis penyakit yaitu penyakit menular dan penyakit tidak menular. Penyakit menular merupakan penyakit yang disebabkan oleh mikroorganisme patogen, bakteri, dan virus.

Penyakit menular merupakan penyakit yang dapat menginfeksi individu melalui kontak langsung ataupun tidak langsung dengan individu yang terinfeksi penyakit. Dalam sejarahnya terdapat beberapa penyakit yang pernah menjadi pandemi di dunia antaranya flu asia, flu babi, flu spanyol, dll. Salah satu virus yang menyebabkan penyakit menular dan mengakibatkan terjadinya pandemi adalah virus corona (Arabi, 2015).

Kelompok virus ini yang dapat menyebabkan penyakit pada burung dan mamalia (termasuk manusia). Dalam kurun waktu dua dekade terakhir terdapat dua jenis penyakit epidemi yang disebabkan oleh virus corona yang terkonfirmasi, epidemi virus corona yang pertama adalah SARS (*Severe Acute Respiratory Syndrome*). SARS merupakan suatu jenis penyakit pernapasan yang disebabkan oleh SARS Coronavirus (SARS-Cov). Kasus SARS pertama kali dipastikan menyerang manusia di Provinsi Guangdong, Cina Selatan pada November 2002. Pada tahun 2004, peneliti di Cina akhirnya menemukan vaksin SARS, kemudian penyakit epidemi virus corona yang kedua adalah MERS (*Middle Ears Respiratory Syndrome*) virus ini diketahui menyebar pertama kali di Jordania dan menjadi pandemi di negara-negara Timur Tengah. Pada akhir Desember 2019, kasus pneumonia secara misterius pertama kali terkonfirmasi di Wuhan, Provinsi Hubei, China. Pemicu utama infeksi ini adalah virus corona jenis baru, yang akhirnya dikenal dengan Covid-19 (Abdullah et al, 2020).

Covid-19 merupakan suatu penyakit menular yang disebabkan oleh corona virus jenis baru yang kemudian di beri nama secara medis adalah *Severe Acute Respiratory Syndrome Coronavirus 2* (SARS-CoV-2) (Susilo et al, 2020). Terdapat beberapa gejala apabila terinfeksi Covid-19 yaitu mulai dari gejala ringan sampai gejala berat. Gejala ringan yang dirasakan adalah demam, batuk, dan kehilangan nafsu makan. Sedangkan gejala berat bakal dirasakan yaitu sesak napas, kehilangan indra perasa dan penciuman, dan demam tinggi dengan suhu di atas 38°C. WHO secara resmi menyatakan pada tanggal 11 Maret 2020 menetapkan Covid-19 sebagai pandemi global (Isbaniah dan Susanto, 2020).

Dikarenakan penularan virus Covid-19 yang terus meluas pemerintah Indonesia membuat peraturan yaitu melakukan pelaksanaan isolasi mandiri karantina wilayah, wajib memakai masker, menjaga jarak dan menjauhi kerumunan, rajin mencuci tangan, serta melakukan vaksinasi. (Susilo et al, 2020).

Vaksinasi Covid-19 merupakan salah satu upaya pemerintah Indonesia untuk menanggulangi penyebaran Covid-19. Pemberian vaksin Covid-19 bukan merupakan obat, tetapi penggunaan vaksin Covid-19 bertujuan untuk mendorong terbentuknya imunitas tubuh terhadap penyakit Covid-19 agar terhindar dari penyakit atau mengurangi gejala berat yang muncul apabila tertular.

Berdasarkan data dari Komite Covid-19 target sasaran vaksin Covid-19 di Indonesia berjumlah 208.265.720 juta jiwa, perbulan Desember 2021 jumlah individu yang telah mendapatkan vaksin Covid-19 dosis ke-1 berjumlah 152.596.517 juta jiwa yang telah melakukan vaksinasi di Indonesia sedangkan untuk individu yang telah mendapatkan dosis ke-2 vaksin Covid-19 berjumlah 107.706.013 juta jiwa yang telah melakukan vaksinasi di Indonesia.

Dalam pelaksanaannya tak sedikit kendala yang dialami pemerintah untuk mencapai 70% penduduk Indonesia yang telah melakukan vaksinasi lengkap (telah mendapatkan dosis 1 dan 2) diantaranya banyaknya berita *hoax* mengenai vaksin Covid-19 yang beredar di masyarakat, ketidakpercayaan masyarakat terhadap adanya Covid-19, serta meragukan keefektifan dan keamanan penggunaan vaksin Covid-19, selain itu adanya masalah pungli untuk mendapatkan vaksinasi dan sertifikat palsu bagi yang telah melakukan vaksinasi (Sidiq dan Dewi, 2021).

Salah satu cara yang dapat memberikan penjelasan dan pemahaman tentang permasalahan yang terjadi dalam dunia nyata yaitu melalui pemodelan matematika. Model matematika merupakan suatu metode yang mempelajari penyebaran penyakit, biasanya disebut model matematika epidemiologi. Model matematika merupakan bidang ilmu matematika yang merepresentasikan persoalan kompleks ke dalam bentuk matematika. Setelah model matematika diperoleh maka dapat diselesaikan secara sistematis, dan dapat diaplikasikan kembali dalam permasalahan yang terjadi dalam dunia nyata.

Model SIR merupakan model klasik yang memaparkan mengenai penyebaran suatu penyakit yang pertama kali dirumuskan oleh Kermack pada tahun 1927. Seiring perkembangannya model klasik SIR dapat dikembangkan mejadi beberapa model seperti SEIR, MSEIR, SITA, dan lain-lain (Tri dan Guvil, 2017). Inisial dari model-model di atas diberikan sesuai dengan asumsi yang

digunakan dalam model, dengan S yang menyatakan pada kata *susceptible* atau subpopulasi yang berisikan individu yang rentan terserang penyakit, untuk huruf E yang menyatakan pada kata *exposed* (terpapar), sementara itu untuk inisial huruf I merujuk pada kata *infective* (individu rentan akan terinfeksi pada suatu waktu dan dapat menginfeksi individu renta lainnya melalui kontak secara langsung maupun tidak langsung), dan R menyatakan pada kata *recovery* yang menyatakan subpopulasi yang sembuh (Himawan, 2016).

Penelitian terdahulu yang membahas mengenai pemodelan matematika pada penyebaran penyakit Covid-19 telah dilangsungkan oleh beberapa peneliti, diantaranya oleh Manaqid dkk (2021) dengan menganalisis penyebaran penyakit Covid-19 dengan *lockdown* dan karantina dengan model epidemik SEIRLQ, kemudian Maghvirotul (2021) dengan menganalisis penyebaran penyakit Covid-19 dengan vaksinasi, isolasi mandiri, dan karantina dengan bentuk model epidemik SEIRVQ, dan Miftahul dkk (2021) dengan menganalisis penyebaran penyakit Covid-19 dengan menggunakan parameter vaksinasi dengan model epidemik SEIR.

Pada proses penularannya Covid-19 didapati memiliki fase laten, yaitu dalam kurun waktu 5 – 6 hari dengan jangkauan antara 1 – 14 hari (Telaumbanua, 2020). Di sisi lain adanya keterlibatan vaksinasi dalam penanganan penyebaran penyakit Covid-19 di Indonesia, sehingga pada penelitian ini sangat cocok dikaji dengan menggunakan model matematika SVEIR. Secara umum, pada penelitian ini akan mengkaji mengenai penentuan titik ekuilibrium, menemukan bilangan reproduksi dasar, analisis kestabilan pada titik ekuilibrium, serta simulasi dari model.

1.2. Rumusan Masalah

1. Bagaimana model matematika penyebaran penyakit Covid-19 setelah vaksinasi?
2. Dimana titik ekuilibrium dari model matematika penyebaran penyakit Covid-19 setelah vaksinasi?
3. Bagaimana kestabilan titik ekuilibrium model matematika pada penyebaran penyakit Covid-19 dengan penggunaan vaksinasi?

1.3. Batasan Masalah

Batasan masalah pada penelitian yaitu dibatasi pada penularan penyakit Covid-19 pada populasi manusia yang telah di vaksinasi sebanyak dua kali di Indonesia. Analisis yang akan dilakukan pada model matematika tersebut yaitu dengan mencari titik ekuilibrium, selanjutnya mencari nilai *Basic Reproduction*

Number (R_0), dan kemudian menganalisis secara lebih dalam mengenai kestabilan titik ekuilibrium.

1.4. Tujuan Penelitian

1. Mengetahui model matematika penyebaran penyakit Covid-19 setelah vaksinasi.
2. Mengetahui titik ekuilibrium model matematika pada penyebaran penyakit Covid-19 setelah vaksinasi.
3. Mengetahui kestabilan titik ekuilibrium model matematika pada penyebaran penyakit Covid-19 dengan penggunaan vaksinasi.

1.5. Manfaat Penelitian

1. Bagi pembaca
Dapat memberikan informasi kepada pembaca mengenai proses penyebaran Covid-19 dengan penggunaan vaksinasi.
2. Bagi peneliti
Dapat mengaplikasikan ilmu matematika terkhusus dalam bidang pemodelan matematika pada permasalahan penyebaran Covid-19 dengan penggunaan vaksinasi.

II. TINJAUAN PUSTAKA

2.1. Covid-19

Covid-19 merupakan penyakit sindrom pernapasan yang ditimbulkan oleh salah satu jenis virus corona yaitu SARS-CoV-2 yang menginfeksi saluran pernapasan. Virus ini pertama kali terdeteksi di kota wuhan, China pada akhir desember 2019. Penyebaran virus ini terjadi dengan sangat cepat sehingga saat ini sudah hampir seluruh negara sudah terkena dampaknya. Terdapat beberapa gejala apabila terinfeksi Covid-19 mulai dari gejala ringan, hingga berat. Adapun gejala umum yang dirasakan adalah batuk, demam (suhu>38°C), kesulitan bernapas, nyeri tenggorokan, kelelahan, dan pasien yang mempunyai penyakit komorbid (penyakit penyerta) seperti penyakit jantung, diabetes, hipertensi, dan penyakit paru-paru memiliki bahaya lebih besar hingga dapat menyebabkan kematian.

Seiring berjalannya waktu, virus Covid-19 mengalami banyak sekali mutasi, dan diantaranya mengakibatkan adanya bermunculan varian baru yang lebih berbahaya dan gejala yang ditimbulkan juga semakin susah untuk dibedakan dengan penyakit-penyakit pada umum yang lain (WHO, 2021).

Dalam mengklasifikasikan varian baru virus Covid-19 organisasi kesehatan dunia membaginya menjadi dua kelompok yakni:

1. *Variant of interest (VoI)*

- a. Varian Mu pertama kali terkonfirmasi di negara Kolombia pada bulan Januari 2021,
- b. Varian Eta dengan kasus pertama kali ditemukan di Inggris raya atau Nigeria pada Desember 2020.
- c. Varian Iota kasus pertamanya ditemukan di Amerika serikat pada bulan November 2020.
- d. Varian Kappa kasus pertamanya dilaporkan di India dan terjadi pada bulan Oktober 2020.
- e. Varian Lambda kasus pertamanya di temukan di peru pada bulan Desember 2020.

2. *Variant of concern (VoC)*

- a. Varian Alpha dengan kasus pertama kali ditemukan di negara Inggris pada bulan September 2020 dengan tingkat penularan virus varian jenis ini sebesar 43-90% lebih mudah dari virus corona sebelumnya.
- b. Varian Delta dengan kasus permata kali ditemukan di India pada bulan Oktober 2020 dengan tingkat penularan virus varian jenis ini sebesar 30-100% lebih mudah menular dari varian Alpha.

- c. Varian Beta dengan kasus pertama kali terkonfirmasi di Afrika Selatan Pada bulan Mei 2020 dengan tingkat penularan virus varian jenis ini belum diketahui. Varian Gamma kasus pertama kali terkonfirmasi di Brazil pada bulan November 2020 dengan tingkat penularan virus varian ini belum diketahui.
- d. Varian terbaru ialah Omicron dimana kasus pertama kali teridentifikasi di Afrika Selatan pada bulan November 2021 dengan tingkat penularan virus lebih cepat dari pada varian Delta.

Keadaan seperti ini ada beberapa cara pencegahan penularan virus Covid-19 yang dapat dilakukan yaitu menggunakan masker ketika diluar rumah, menjaga jarak, mengurangi mobilitas, rajin mencuci tangan, dan vaksinasi. Vaksinasi merupakan pemberian vaksin yang guna untuk membantu sistem imun mengembangkan pertahanan tubuh dari suatu penyakit. Ada beberapa manfaat melakukan vaksin diantaranya adalah merangsang sistem kekebalan tubuh atau daya tahan tubuh terhadap virus, mengurangi resiko penularan, mengurangi dampak berat dari virus apabila tertular, dan untuk mencapai *herd immunity*. Individu yang telah melakukan vaksin maupun yang sudah pulih dari Covid-19 dapat terinfeksi kembali apabila tidak mematuhi protokol Kesehatan (Kemkes, 2021).

Banyak pertimbangan yang dilakukan sebelum memilih jenis vaksin yang harus digunakan, antara lain pertimbangan yang dilakukan ialah keamanan dan efikasi vaksin yang digunakan. Berdasarkan SK Mentri Kesehatan No. HK.01.07/MENKES/12758/2020 telah menentukan tujuh jenis vaksin yang akan dipakai di Indonesia ialah vaksin yang dibuat oleh PT. Bio Farma (Persero), AstraZeneca, China National Pharmaceutical, Novavax Inc, Pfizer Inc, BioNTech, dan Sinovac Life Sciences Co (Kemkes, 2020).

Berdasarkan data pada Komite Covid-19 pertanggal 21 Desember 2021 tercatat kasus positif yang terjadi (I) yaitu sebanyak 4.829 kasus, yang terkonfirmasi (E) yaitu sebanyak 4.260.677 kasus, dengan jumlah kasus yang sembuh dan meninggal (R) yaitu sebesar 4.255.848, dengan populasi rentan (S) sebesar 101.040.131 orang, dan jumlah masyarakat Indonesia yang telah melakukan vaksinasi lengkap (V) yaitu sebanyak 107.706.013 jiwa, berdasarkan data di atas maka model SVEIR yang terbagi menjadi 5 kompartemen dapat digunakan dalam penelitian Covid-19.



Sumber: Komite Covid-19

Gambar 1. Peta sebaran Covid-19

2.2. Model Matematika

Model matematika merupakan salah satu metode yang dapat digunakan untuk menyatakan persoalan kompleks ke dalam bentuk matematika. Model matematika dapat berupa persamaan atau sistem persamaan. Model ini diharapkan dapat mewakili hal-hal penting dan mengabaikan hal-hal yang tidak penting. Model matematika dikarakterisasi dengan asumsi-asumsi seperti variable, parameter, dan bentuk fungsi (Meksianis, 2018).

Dalam prosesnya pemodelan matematika memiliki beberapa tahap sebagai berikut:

1. Identifikasi Masalah.

Tahap pertama yang akan dilakukan adalah identifikasi masalah, di dalam mengidentifikasi masalah terlebih dahulu harus ditetapkan tujuan dan permasalahan yang ingin dijawab.

2. Membuat.Asumsi.

Pada tahap ini akan membentuk asumsi mengenai model yang akan dibuat. Asumsi yang dibuat harus sesuai dengan tujuan dari model tersebut diformulasikan.

3. Formulasi Model Matematika.

Setelah membuat asumsi, perlu dilakukan formulasi model matematika. Model matematika yang dirumuskan harus selaras dengan asumsi-asumsi yang dibuat pada langkah sebelumnya.

4. Mencari Solusi dari Model Matematika

Pada tahap ini akan dilakukan pencarian solusi terhadap model matematika. Untuk memperoleh solusi pada suatu model matematika dapat dilakukan dengan cara analitik dan numerik. Pada model matematika yang sederhana pencarian solusinya masih memungkinkan dengan cara analitik. Sedangkan untuk model matematika yang kompleks harus diperoleh melalui simulasi numerik dengan menggunakan *software*.

5. Interpretasi Hasil.

Setelah memperoleh solusi dari model matematika, maka hasil yang diperoleh dari model matematika perlu diinterpretasi. Dalam menginterpretasikan hasil tersebut harus masuk akal dari perspektif bidang dimana matematika tersebut diaplikasikan.

6. Validasi Model.

Pada tahap ini, dilakukan validasi mengenai model. Pada tahap ini akan dilakukan dengan cara memeriksa kembali apakah model yang dibentuk tersebut memberikan hasil yang realistis dengan realita dan apakah hasil yang diperoleh dari model tersebut berbanding lurus dengan asumsi-asumsi yang telah dibentuk. Jika tidak, maka asumsi-asumsi yang telah dibuat harus diperiksa kembali (Maksianis, 2018).

2.3. Persamaan Diferensial

Definisi 1 (Purcell, 2010)

Sebuah fungsi f dan $x \in df$, turunan fungsi f di x , dinyatakan dengan $f'(x)$ dan didefinisikan dengan

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad (2.1)$$

Asalkan limit ini ada dan bukan ∞ atau $-\infty$. Jika limit ini memang ada, maka dikatakan bahwa f terdiferensialkan di x .

Untuk mempermudah perhitungan turunan fungsi memiliki sifat-sifat turunan fungsi. Sifat-sifat turunan fungsi ini diperoleh dari pengembangan definisi turunan fungsi. Berikut merupakan beberapa sifat-sifat dari turunan fungsi:

1. Sifat Turunan Fungsi Pangkat

Jika $f(x) = ax^n$ dimana a dan n adalah konstanta maka turunannya adalah

$$f'(x) = anx^{n-1} \quad (2.2)$$

a. Pembuktian untuk n bilangan bulat positif

$$f(x) = ax^n$$

$$f(x + \Delta h) = a(x + \Delta h)^n$$

$$\begin{aligned}
&= a \left(x^n + \binom{n}{1} x^{n-1} \Delta h + \binom{n}{2} x^{n-2} \Delta h^2 + \cdots + \binom{n}{n-1} x \Delta h^{n-1} + \Delta h^n \right) \\
&= ax^n + a \binom{n}{1} x^{n-1} \Delta h + a \binom{n}{2} x^{n-2} \Delta h^2 + \cdots + a \binom{n}{n-1} x \Delta h^{n-1} + a \Delta h^n
\end{aligned}$$

Lalu $f(x)$ dan $f(x + \Delta h)$ substitusi ke definisi turunan fungsi, sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{\Delta h \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta h) - f(x)}{\Delta h} \\
&= \lim_{\Delta h \rightarrow 0} \frac{\left(ax^n + a \binom{n}{1} x^{n-1} \Delta h + a \binom{n}{2} x^{n-2} \Delta h^2 + \cdots + a \binom{n}{n-1} x \Delta h^{n-1} + a \Delta h^n \right) - (ax^n)}{\Delta h} \\
&= \lim_{\Delta h \rightarrow 0} \frac{a \binom{n}{1} x^{n-1} \Delta h + a \binom{n}{2} x^{n-2} \Delta h^2 + \cdots + a \binom{n}{n-1} x \Delta h^{n-1} + a \Delta h^n}{\Delta h} \\
&= \lim_{\Delta h \rightarrow 0} \frac{\Delta h \left(a \binom{n}{1} x^{n-1} + a \binom{n}{2} x^{n-2} \Delta h + \cdots + a \binom{n}{n-1} x \Delta h^{n-2} + a \Delta h^{n-1} \right)}{\Delta h} \\
&= \lim_{\Delta h \rightarrow 0} a \binom{n}{1} x^{n-1} + a \binom{n}{2} x^{n-2} \Delta h + \cdots + a \binom{n}{n-1} x \Delta h^{n-2} + a \Delta h^{n-1} \\
&= a \binom{n}{1} x^{n-1} + a \binom{n}{2} x^{n-2} (0) + \cdots + a \binom{n}{n-1} x (0)^{n-2} + a (0)^{n-1} \\
&= a \binom{n}{1} x^{n-1} + 0 + \cdots + 0 + 0
\end{aligned}$$

$$\text{dengan } \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

$$\begin{aligned}
\binom{n}{1} &= \frac{n!}{1!(n-1)!} \\
&= n \cdot \frac{(n-1)!}{(n-1)!} = n
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f'(x) &= a \binom{n}{1} x^{n-1} \\
&= anx^{n-1}
\end{aligned}$$

$\therefore$ terbukti turunan $f(x) = ax^n$ adalah $f'(x) = anx^{n-1}$

b. Pembuktian untuk n bilangan bulat negatif

Misalkan $n = -m$, dimana m bilangan asli maka,

$$f = x^{-m} = \frac{1}{x^m}$$

Dikarenakan bentuk fungsi f membentuk pembagian maka untuk memperoleh turunannya memakai sifat turunan pembagian fungsi, maka turunannya yaitu:

$$f'(x) = \frac{b(x) \cdot a'(x) - a(x) \cdot b'(x)}{b^2(x)}$$

$$\text{Dimana } a(x) = 1$$

$$b(x) = x^m$$

$$a'(x) = 0$$

$$b'(x) = m \cdot x^{m-1}$$

Lalu substitusikan ke dalam persamaan

$$f'(x) = \frac{(x^m) \cdot (0) - (1) \cdot (m \cdot x^{m-1})}{(x^m)^2}$$

$$f'(x) = \frac{0 - m \cdot x^{m-1}}{(x^m)^2}$$

$$= \frac{-m \cdot x^{m-1}}{(x^m)^2}$$

$$= -m \cdot x^{m-1-2m}$$

$$= -m \cdot x^{-m-1}$$

Dikarenakan $-m$ sama dengan n maka

$$f'(x) = n \cdot x^{n-1}$$

$\therefore$ terbukti turunan $f(x) = x^{-n}$ adalah $f'(x) = nx^{n-1}$

2. Sifat Turunan Fungsi Perkalian

Jika $f(x) = a(x) \cdot b(x)$ dimana $a(x), b(x)$ adalah sebuah fungsi sehingga turunannya adalah

$$f'(x) = a'(x) \cdot b(x) + a(x) \cdot b'(x) \quad (2.3)$$

Pembuktian

$$f(x) = a(x) \cdot b(x)$$

$$f(x+h) = a(x+h) \cdot b(x+h)$$

Lalu $f(x)$ dan $f(x+h)$ substitusi ke definisi turunan fungsi, sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a(x+h) \cdot b(x+h) - a(x) \cdot b(x)}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a(x+h) \cdot b(x+h) - a(x+h) \cdot b(x) + a(x+h) \cdot b(x) - a(x) \cdot b(x)}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[a(x+h) \cdot b(x+h) - a(x+h) \cdot b(x)] + [a(x+h) \cdot b(x) - a(x) \cdot b(x)]}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{a(x+h)[b(x+h) - b(x)]}{h} + \frac{b(x)[a(x+h) - a(x)]}{h} \right) \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a(x+h)}{1} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{b(x+h) - b(x)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{b(x)}{1} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a(x+h) - a(x)}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a(x+0)}{1} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{b(x+h) - b(x)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{b(x)}{1} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a(x+h) - a(x)}{h} \\
f'(x) &= a(x) \cdot b'(x) + b(x) \cdot a'(x)
\end{aligned}$$

$\therefore$ terbukti bahwa turunan $f(x) = a(x) \cdot b(x)$ adalah $f'(x) = a'(x) \cdot b(x) + a(x) \cdot b'(x)$

3. Sifat Turunan Pembagian Fungsi

Jika $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ dimana $u(x)$ dan $v(x)$ adalah sebuah fungsi maka turunannya adalah

$$f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v^2(x)} ; v(x) \neq 0 \quad (2.4)$$

Pembuktian

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$$

$$f(x+h) = \frac{u(x+h)}{v(x+h)}$$

Lalu $f(x)$ dan $f(x+h)$ substitusi ke definisi turunan fungsi, sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{u(x+h)}{v(x+h)} - \frac{u(x)}{v(x)}}{h}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{v(x) \cdot u(x+h) - u(x) \cdot v(x+h)}{v(x+h) \cdot v(x)}}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{v(x) \cdot u(x+h) - u(x) \cdot v(x+h)}{h \cdot v(x+h) \cdot v(x)} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{v(x) \cdot u(x+h) - u(x)v(x) + u(x)v(x) - u(x) \cdot v(x+h)}{h \cdot v(x+h) \cdot v(x)} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} v(x) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x+h) - u(x)}{h} - \lim_{h \rightarrow 0} u(x) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{v(x+h) - v(x)}{h} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{v(x+h) \cdot v(x)} \\
f'(x) &= \frac{v(x) \cdot u'(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v^2(x)}
\end{aligned}$$

$\therefore$ terbukti bahwa turunan $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ adalah $f'(x) = \frac{v(x) \cdot u'(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v^2(x)}$; $v \neq 0$

Eksperisi matematis $y', y'', y''', \dots, y^n$ yang sering kali dipakai untuk melambangkan tiap-tiap turunan pertama, kedua, ketiga sampai ke-n dari y terhadap variabel independent yang digunakan. Untuk y'' artinya $\frac{d^2y}{dx^2}$ jika variabel bebasnya adalah x . Jika variabel bebas yang digunakan adalah waktu, biasanya notasi yang digunakan adalah t , sehingga tanda petik diubah menjadi titik. Sehingga notasinya menjadi $\dot{y}, \ddot{y}$ dan $\ddot{\ddot{y}}$ masing melambangkan $\frac{dy}{dt}, \frac{d^2y}{dt^2}$, dan $\frac{d^3y}{dt^3}$ (Richard dan Gabriel, 2007).

Dalam persamaan diferensial dapat diklasifikasikan menjadi dua macam berdasarkan jumlah variable bebasnya sebagai berikut:

1. Persamaan Diferensial Biasa

Persamaan diferensia biasa merupakan suatu persamaan diferensial yang melibatkan turunan dari satu atau lebih variabel tak bebas terhadap satu variabel bebas.

Bentuk umum persamaan diferensial biasa:

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^n) = 0 \quad (2.5)$$

Dengan $y^{(n)}$ merupakan turunan ke-n dari y terhadap x

Contoh

- $3y'' - 5y' + 3y = 0$
- $\frac{d^2y(t)}{dt^2} + \frac{k}{m}y(t) = 0$

Contoh di atas merupakan persamaan diferensial biasa karena pada contoh pertama hanya terdapat satu variabel bebas yaitu variabel y . Sedangkan untuk contoh kedua variabel bebasnya adalah t .

2. Persamaan Diferensial Parsial

Persamaan diferensial parsial merupakan suatu persamaan yang memuat satu lebih variabel bebas.

$$F\left(x, z, \dots, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial z}, \dots, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \dots\right) = 0 \quad (2.6)$$

Contoh

$$\frac{\partial u}{\partial y} - 6 \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial^3 x} = 0 \text{ adalah persamaan diferensial parsial orde 2 derajat 1.}$$

Persamaan diferensial parsial umumnya memiliki variabel bebas untuk ruang dan waktu. Variabel bebas untuk ruang umumnya dinotasikan dengan (x, y, z, t) dengan t yang melambangkan notasi variabel waktu (Putu, 2021).

Orde pada persamaan diferensial didefinisikan sebagai turunan tertinggi yang terdapat pada sebuah persamaan diferensial tersebut. Sedangkan untuk derajat dari suatu persamaan diferensial dapat ditentukan dari pangkat turunan tertinggi yang terdapat di dalam sebuah persamaan diferensial tersebut.

Contoh persamaan diferensial dengan nilai orde

- $x \frac{dy}{dx} - y^2 = 0$ merupakan persamaan diferensial orde 1 derajat 1, karena pada persamaan tersebut memiliki turunan tertingginya adalah 1 dengan pangkat 1.
- $\frac{d^2 y}{dt^2} - 5 \frac{dy}{dt} + 4y = 0$ merupakan suatu persamaan diferensial orde 2 memiliki derajat 1, karena pada persamaan tersebut memiliki turunan tertingginya ialah 2 dengan pangkat 1.

2.4. Persamaan Otonomus

Persamaan diferensial dapat diklasifikasikan kedalam dua bentuk persamaan yaitu bentuk persamaan pertama adalah persamaan diferensial autonomous dan bentuk persamaan kedua yaitu persamaan diferensial non-autonomous.

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t) \quad (2.7)$$

$$\frac{dx}{dt} = f(x) \quad (2.8)$$

Pada persamaan (2.7) adalah persamaan diferensial yang berbentuk non-autonomous yang bertumpu pada variabel terikat x dan variabel bebas t dan persamaan (2.8) adalah persamaan autonomous dikarenakan pada persamaan (2.8) hanya bergantung pada variabel x sedangkan untuk variabel t tidak muncul secara eksplisit pada persamaan.

2.5. Sistem Persamaan Diferensial

Sistem persamaan diferensial yaitu gabungan dari dua atau lebih persamaan diferensial. Sistem persamaan diferensial dapat ditulis dalam bentuk:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \quad (2.9)$$

dengan:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} \end{bmatrix} \quad \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = \begin{bmatrix} f_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ f_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

t merupakan variabel bebas sedangkan x merupakan variabel terikat dari sistem persamaan diferensial di atas, sehingga $x_1 = x_1(t), x_2 = x_2(t), \dots, x_n = x_n(t)$, dimana $\frac{dx_n}{dt}$ merupakan turunan fungsi x_n terhadap t , dan f_i adalah fungsi yang tergantung terhadap variabel $x_1, x_2, \dots, x_n$ dan t (Lasker et al, 2021).

Berlandasan kelinearannya, suatu sistem persamaan diferensial dapat dikelompokkan menjadi dua sebagai berikut:

1. Sistem Persamaan Diferensial Linear

Menurut (Boyce et al, 2017) bentuk umum dari sistem persamaan diferensial linear dapat dirumuskan dalam bentuk:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 = x_1(t) &= a_{11}(t)x_1(t) + a_{12}(t)x_2(t) + \dots + a_{1n}(t)x_n(t) + f_1(t) \\ \dot{x}_2 = x_2(t) &= a_{21}(t)x_1(t) + a_{22}(t)x_2(t) + \dots + a_{2n}(t)x_n(t) + f_2(t) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n = x_n(t) &= a_{n1}(t)x_1(t) + a_{n2}(t)x_2(t) + \dots + a_{nn}(t)x_n(t) + f_n(t) \end{aligned} \quad (2.11)$$

Sehingga persamaan (2.11) juga dapat dibuat dalam bentuk matriks seperti berikut:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{f}(t) \quad (2.12)$$

Atau

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \dots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{nt}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix} \quad (2.13)$$

Jika $f_k(t)$ dengan $k = 1, 2, 3, \dots, n$ nilainya sama dengan nol, maka pada sistem persamaan diferensial di atas merupakan sistem persamaan diferensial homogen yang dapat ditulis secara matematis sabagai berikut:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x} \quad (2.14)$$

Maka bentuk matriksnya menjadi

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{nt} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad (2.15)$$

2. Sistem Persamaan Diferensial Non-linear

Menurut (Ross, 2010) sistem persamaan diferensial non-linear merupakan suatu persamaan diferensial biasa yang tidak linear. Suatu persamaan diferensial dinyatakan non-linear jika pada persamaan diferensial tersebut mengandung paling sedikit salah satu dari persyaratan berikut:

1. Terdapat variabel tak bebas dari turunan-turunan berpangkat selain satu.
2. Memuat perkalian dari variabel tak bebas atau turunannya.
3. Terdapat fungsi transendental dari variabel tak bebas dan turunannya (Ross, 2010).

Contoh sistem persamaan diferensial non-linear:

$$\frac{dx}{dt} = xg - 2x$$

$$\frac{dx}{dt} = x^2 + 4x$$

Contoh di atas adalah sistem persamaan diferensial non-linear dengan variabel bebas t sedangkan x dan g merupakan variabel terikat. Sistem persamaan di atas merupakan sistem persamaan non-linear dikarenakan mengandung perkalian antara variabel terikat x dan g serta terdapat kuadrat pada variabel terikat x .

2.6. Titik Ekuilibrium

Titik ekuilibrium ialah salah satu faktor mendasar untuk mengkaji perilaku dari sistem. Titik ekuilibrium digunakan untuk membedah kestabilan dari titik ekuilibrium yang didapat.

Definisi 2 (Olsder dan Woude, 2003)

Dibagikan sistem persamaan diferensial $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$. Titik $\bar{\mathbf{x}} \in R^n$ disebut titik kesetimbangan dari $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, jika memenuhi $\mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}) = 0$.

Titik ekuilibrium terbagi atas dua yaitu titik ekuilibrium bebas penyakit dan titik ekuilibrium endemik. Titik ekuilibrium bebas penyakit adalah kondisi dimana tidak ada individu yang terinfeksi penyakit atau saat penyakit tidak menyebar di dalam populasi. Titik ekuilibrium endemik merupakan kondisi dimana setidaknya ada satu individu yang terinfeksi penyakit atau saat penyakit menyebar di dalam populasi.

2.7. Linearisasi

Linearisasi adalah suatu tahap yang dipakai untuk mengubah suatu sistem persamaan diferensial non-linear yang akan diubah menjadi sistem persamaan diferensial linear, hal ini dilakukan agar mempermudah dalam proses pencarian. Melakukan linearisasi pada sistem persamaan diferensial non-linear biasanya bertujuan untuk mengetahui perilaku sistem disekitar titik ekuilibrium sistem tersebut. Dalam proses pencarian hasil linearisasi dapat digunakan matriks Jacobian

Diberikan suatu sistem persamaan diferensial non-linear, yaitu:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad (2.16)$$

diberikan pula $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \dots, f_n)$. Jika $\bar{\mathbf{x}} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$ merupakan titik ekuilibrium dari sistem (2.10), maka pendekatan linear pada sistem (2.16) diperoleh dengan menggunakan ekspansi Taylor pada disekitar titik ekuilibrium $\bar{\mathbf{x}} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$ yaitu:

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) &\cong f_1(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) + \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)(x_1 - \bar{x}_1) + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)(x_n - \bar{x}_n) + Rf_1 \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) &\cong f_2(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) + \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)(x_1 - \bar{x}_1) + \dots + \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)(x_n - \bar{x}_n) + Rf_2 \\ &\vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) &\cong f_n(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) + \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)(x_1 - \bar{x}_1) + \dots + \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)(x_n - \bar{x}_n) + Rf_n \end{aligned} \quad (2.17)$$

Pendekatan linear untuk sistem (2.17) yaitu:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) &\cong f_1(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) + \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)(x_1 - \bar{x}_1) + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)(x_n - \bar{x}_n) + Rf_1 \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) &\cong f_2(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) + \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)(x_1 - \bar{x}_1) + \dots + \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)(x_n - \bar{x}_n) + Rf_2 \\ &\vdots \\ \dot{x}_n = f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) &\cong f_n(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) + \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)(x_1 - \bar{x}_1) + \dots + \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)(x_n - \bar{x}_n) + Rf_n \end{aligned} \quad (2.18)$$

$Rf_1, Rf_2, \dots, Rf_n$ disebut juga bagian non-linear maka selanjutnya bisa dihilangkan karena nilainya menuju nol (Ambarwati, 2014).

Dalam penulisannya sistem (2.18) bisa diubah kedalam bentuk matriks, seperti sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (x_1 - \bar{x}_1) \\ (x_2 - \bar{x}_2) \\ \vdots \\ (x_n - \bar{x}_n) \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

Misalkan $y_1 = x_1 - \bar{x}_1, y_2 = x_2 - \bar{x}_2, \dots, y_n = x_n - \bar{x}_n$, sehingga $\dot{y}_1 = \dot{x}_1, \dot{y}_2 = \dot{x}_2, \dots, \dot{y}_n = \dot{x}_n$ didapat

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \vdots \\ \dot{y}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

Atau dapat ditulis menjadi:

$$\dot{y} = J(f(\bar{x}))y \quad (2.21)$$

Dengan

$$J(f(\bar{x})) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

$J(f(\bar{x}))$ merupakan matriks Jacobian pada titik ekuilibrium $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$.

2.8. Nilai Eigen dan Vektor Eigen

Definisi 3 (Anton dan Rorres, 2004)

Jika A adalah matriks $n \times n$, maka vektor tak nol x dalam R^n disebut vektor eigen dari A jika Ax merupakan sebuah kelipatan skalar dari x , maka persamaannya ditulis

$$Ax = \lambda x \quad (2.23)$$

Untuk skalar sembarang λ . Skalar λ juga disebut nilai eigen dari A dan x dinamakan sebagai vektor eigen λ . Untuk mendapatkan nilai eigen dari matriks A , maka persamaan (2.23) dapat ditulis kembali $Ax = \lambda Ix$ atau ekuivalen dengan,

$$(\lambda I - A)x = 0 \quad (2.24)$$

Dengan I yaitu matriks identitas, untuk mendapatkan nilai eigen, maka harus terdapat solusi yang tidak bernilai nol dari persamaan (2.24). Persamaan (2.24) menghasilkan solusi yang tidak nol jika dan hanya jika

$$\det(\lambda I - A) = 0 \quad (2.25)$$

Sehingga persamaan (2.25) ini dapat dinyatakan persamaan karakteristik dari matriks A (Anton dan Rorres, 2004).

2.9. Basic Reproduction Number

Basic reproduction number (R_0) atau bilangan reproduksi dasar yaitu suatu bilangan yang menyatakan jumlah rata-rata individu infeksi sekunder

dikarenakan terinfeksi oleh individu infeksi primer yang terjadi di dalam populasi rentan.

Definisi 4 (Diekmann dan heesterbeek, 2000)

Basic reproduction number adalah bilangan yang menyatakan jumlah rata-rata infeksi sekunder yang ditimbulkan oleh satu individu infeksi primer selama masa terinfeksi dalam keseluruhan populasi rentan.

Basic reproduction number juga dapat dihitung dengan menggunakan metode *Next Generation Matrix* (NGM). Sebelum melakukan pencarian *Basic reproduction number* pertama-tama harus dilakukan linearisasi terhadap sistem persamaan diferensial yang di dekati pada titik ekuilibrium bebas penyakit. Persamaan kompartemen populasi terinfeksi yang telah dilinearisasi dapat ditulis sebagai berikut :

$$\dot{x} = (F + V)x \quad (2.26)$$

Selanjutnya didefinisikan matriks K sebagai :

$$K = -FV^{-1} \quad (2.27)$$

Dengan K didefinisikan sebagai *Next Generation Matrix* (NGM). Nilai harapan dari infeksi pada populasi rentan merupakan nilai eigen terbesar dari matriks K (Driesse dan Watmough, 2001) sehingga:

$$R_0 = \rho(K) = \rho(-FV^{-1}) \quad (2.28)$$

Dengan:

R_0 = *Basic Reproduction Number*

K = *Next Generation Matrix*.

F = matrik transmisi, yaitu matrik berisikan laju infeksi pada individu baru.

V = matrik transisi, adalah matriks yang berisikan laju perpindahan masuk dan keluar terhadap subpopulasi terinfeksi.

Selanjutnya ada teorema yang akan membahas kondisi yang diperoleh dari *basic reproduction number* sebagai berikut:

Teorema 1 (Mandel et all, 2011).

1. Jika $R_0 < 1$, artinya sistem hanya memiliki titik ekuilibrium bebas penyakit yang bersifat stabil asimtotik lokal.
2. Jika $R_0 > 1$, artinya ada 2 titik ekuilibrium dalam sistem yaitu titik ekuilibrium bebas penyakit yang bersifat tidak stabil dan titik ekuilibrium endemik yang bersifat stabil asimtotik lokal.

Apabila nilai R_0 yang diperoleh kecil dari satu ($R_0 > 1$), artinya setiap individu yang tertular penyakit akan menularkan lebih dari satu individu rentan yang mengakibatkan penyakit akan mewabah pada suatu populasi. Jika $R_0 < 1$, artinya rata-rata individu yang terinfeksi akan berkurang dan berkemungkinan

penyakit akan menghilang sepenuhnya dari populasi (Driessche dan Watmough, 2001).

2.10. Kestabilan Titik Ekuilibrium

Memperoleh solusi dari sistem persamaan diferensial dapat dilakukan dengan cara mencari kestabilan titik ekuilibrium. Mencari kestabilan titik ekuilibrium dilakukan pada titik ekuilibrium bebas penyakit dan titik ekuilibrium endemik hal ini dilakukan untuk mengetahui apakah suatu penyakit akan menghilang dari populasi atau akan menjadi endemik. Kestabilan titik ekuilibrium dari suatu sistem persamaan diferensial diberikan dalam definisi berikut.

Definisi 5 (Olsder dan Woude, 2003)

Diberikan suatu sistem persamaan diferensial $\dot{x} = f(x)$ yang memiliki solusi $x(t, x_0)$ dengan kondisi awal $x(0) = x_0$. Titik ekuilibrium $\bar{x}$ dikatakan

1. Stabil, jika diberikan $\varepsilon > 0$, terhadap $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sedemikian sehingga jika $\|x_0 - \bar{x}\| < \delta$, maka $\|x(t, x_0) - \bar{x}\| < \varepsilon$ untuk $t \geq 0$.
2. Stabil asimtotik jika titik-titik ekuilibriumnya stabil dan terdapat $\delta_1 > 0$ sedemikian sehingga $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t, x_0) - \bar{x}\| = 0$, maka $\|x(t, x_0) - \bar{x}\| < \delta_1$.
3. Tidak stabil jika titik ekuilibrium tidak memenuhi definisi 1.

Dengan

$\| \quad \|$ = Menyatakan norm.

x_0 = Titik awal.

$\bar{x}$ = Titik ekuilibrium.

ε = Suatu bilangan yang memiliki nilai yang sangat kecil.

δ = Menyatakan besar perubahan besaran tertentu.

Diberikan suatu teorema mengenai sifat kestabilan pada suatu sistem yang dilihat dari nilai eigen untuk menyederhanakan dalam mengkaji kestabilan di sekitar titik ekuilibrium sebagai berikut.

Teorema 2 (Olsder and Woude, 2003)

Diberikan sistem persamaan diferensial $\dot{x} = Ax$ dengan A suatu matrix $n \times n$ yang mempunyai k nilai eigen berbeda $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ dengan $k \leq n$.

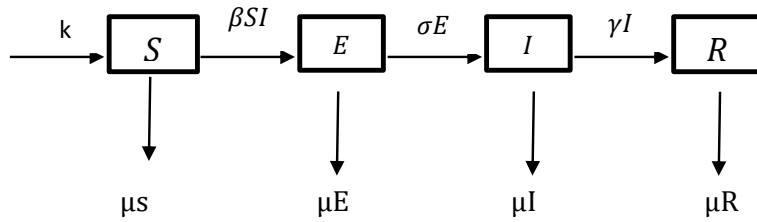
1. Titik ekuilibrium $\bar{x} = 0$ dinyatakan stabil asimtotik jika dan hanya jika $Re(\lambda_i) < 0$ untuk setiap $i = 1, 2, \dots, k$.
2. Titik ekuilibrium $\bar{x} = 0$ dinyatakan stabil jika dan hanya jika $Re(\lambda_i) \leq 0$ untuk setiap $i = 1, 2, \dots, k$.

3. Titik ekuilibrium $\bar{x} = 0$ dikatakan tidak stabil jika dan hanya jika terdapat $Re(\lambda_i) > 0$ untuk $i = 1, 2, \dots, k$.

2.11. Model Epidemik SEIR

Model SIER adalah model matematika yang memaparkan pola penyebaran terhadap suatu penyakit pada populasi yang menyerang manusia. Dalam model SIER populasi yang digunakan diklasifikasikan menjadi empat populasi yaitu *Suscptibel* (S), *Exposed* (E), *Infected* (I), dan *Recovered* (R). Secara umum model SEIR memaparkan pola penyebaran penyakit dari populasi individu *Suscptible* menjadi populasi individu *Exposed* yang melakukan kontak langsung terhadap populasi *Infected*. Kemudian *Exposed* yang pada masa latennya sudah usai dapat menjadi populasi *Infected*. Sedangkan untuk populasi *Infeted* yang mampu bertahan terhadap penyakit dan sudah sembuh maka akan masuk ke dalam populasi *Recovered*.

Berikut merupakan skema untuk model kompartemen SEIR:



Gambar 2. Gambar Model Epidemik SEIR

Berdasarkan asumi, maka diperoleh model epidemik sebagai berikut:

$$\frac{dS}{dt} = k - \beta SI - \mu S$$

$$\frac{dE}{dt} = \beta SI - \sigma E - \mu E$$

$$\frac{dI}{dt} = \sigma E - \gamma I - \mu I$$

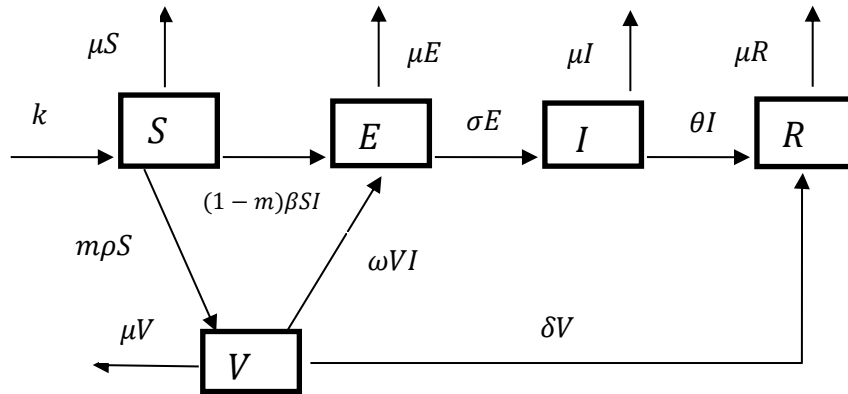
$$\frac{dR}{dt} = \gamma I - \mu R$$

Dengan k adalah laju kelahiran, μ merupakan laju kematian alami, β adalah laju interaksi individu rentan dengan individu terinfeksi penyakit, σ adalah laju masa inkubasi, γ adalah laju individu yang telah pulih dari penyakit. Pada model di atas, populasi diasumsikan tetap $N = S + E + I + R$ sehingga laju kelahiran dan kematian disumsikan tetap (Hurint, 2017).

2.12. Model Epidemik SVEIR

Model SVEIR adalah model matematika yang menggambarkan pola penyebaran suatu penyakit pada populasi yang menyerang manusia dengan penanganan penyebaran penyakit dengan menggunakan vaksinasi pada populasi. Dalam model SVIER populasi yang digunakan diklasifikasikan menjadi lima populasi yaitu *Susceptibel* (S), Vaksinasi (V), *Exposed* (E), *Infected* (I), dan *Recovered* (R). Secara umum model SVEIR menggambarkan pola penyebaran penyakit dari populasi individu *susceptibel* menjadi populasi individu *exposed* yang melakukan kontak langsung terhadap populasi *infected*. Populasi *susceptibel* menjadi populasi vaksinasi dikarenakan telah melakukan vaksinasi maka akan masuk ke dalam populasi vaksinasi. Kemudian populasi individu vaksinasi menjadi populasi *exposed* dikarenakan melakukan kontak secara langsung dengan populasi *infected*. Kemudian *exposed* yang pada masa latennya sudah usai dapat menjadi populasi *infected*. Sedangkan untuk populasi *infected* yang mampu bertahan terhadap penyakit dan sudah sembuh maka akan masuk ke dalam populasi *recovered*. Untuk populasi vaksinasi yang tidak melakukan kontak secara langsung dengan populasi *infected* akan masuk ke dalam populasi individu *recovered*.

Berikut merupakan skema untuk model kompartemen SVEIR:



Gambar 3. Gambar Model Epidemik SEIR

Berdasarkan asumi, maka diperoleh model epidemik sebagai berikut:

$$\frac{dS}{dt} = k - (1 - m)\beta SI - m\rho S - \mu S$$

$$\frac{dV}{dt} = m\rho S - \omega VI - \delta V - \mu V$$

$$\frac{dE}{dt} = (1 - m)\beta SI + \omega VI - \sigma E - \mu E$$

$$\frac{dI}{dt} = \sigma E - \theta I - \mu I$$

$$\frac{dR}{dt} = \theta I + \delta V - \mu R$$

Dengan k adalah laju kelahiran, μ adalah laju kematian alami, β adalah laju interaksi individu rentan dengan individu terinfeksi penyakit, ρ adalah laju individu *susceptibel* yang telah melakukan vaksinasi dan m merupakan proporsi individu *susceptibel*. ω adalah laju individu vaksinasi yang melakukan kontak secara langsung dengan populasi *infected*, σ adalah laju masa inkubasi, θ adalah laju individu yang telah sembuh dari penyakit, δ adalah laju populasi vaksinasi yang tidak berinteraksi secara langsung dengan populasi *infected* dan tidak tertular penyakit sehingga masuk dalam populasi individu *recovered*. Pada model di atas, populasi diasumsikan tetap $N = S + V + E + I + R$ sehingga laju kelahiran dan kematian diasumsikan tetap (Hurint, 2017).

III. METODOLOGI PENELITIAN

3.1 Metode Penelitian

Pada penelitian ini terdapat langkah-langkah penelitian yang dilakukan sebagai berikut:

1. Studi Literatur

Langkah ini dilakukan dengan cara mempelajari model SVEIR dan penyakit Covid-19 dari sumber-sumber yang berkaitan seperti dari buku-buku dan jurnal-jurnal. Langkah ini bertujuan untuk mengumpulkan informasi sebanyak mungkin yang berkaitan dengan topik penelitian, sehingga dapat dijadikan referensi dalam penulisan.

2. Membuat beberapa asumsi dan mendefinisikan variabel serta parameter yang akan digunakan.

Asumsi yang digunakan dalam penelitian ini adalah:

- a. Pada penelitian ini terdapat penyakit yang dapat menyebabkan kematian.
- b. Populasi dimisalkan terbuka, artinya ada individu yang masuk atau keluar ke dalam populasi, total populasi diasumsikan tidak konstan.
- c. Populasi diasumsikan Homogen, artinya setiap individu mempunyai peluang sama untuk melakukan interaksi dengan individu lain.
- d. Jumlah kelahiran dan kematian alami tiap satuan waktu diasumsikan konstan.
- e. Populasi diasumsikan sudah melakukan dua kali vaksinasi.
- f. Populasi yang belum terinfeksi Covid-19 masuk ke dalam kompartemen populasi rentan (S).
- g. Populasi yang telah melakukan vaksinasi bisa terinfeksi Covid-19 karena berinteraksi dengan populasi terinfeksi, namun gejala yang dialami tidak seberat populasi yang belum melakukan vaksinasi, akibatnya ada perpindahan dari kompartemen V ke kompartemen E.
- h. Populasi yang telah melakukan vaksinasi dan tidak terinfeksi Covid-19 dapat memiliki imunitas terhadap penyakit, akibatnya ada perpindahan dari kompartemen V ke kompartemen R.
- i. Infeksi covid-19 dapat terjadi ketika populasi rentan berinteraksi dengan populasi yang terinfeksi penyakit baik secara langsung maupun tidak langsung.

- j. Populasi *recovered* memiliki imunitas terhadap penyakit dan bisa menjadi populasi rentan kembali apabila tidak mematuhi protokol kesehatan dan imunitas dapat menghilang dari dalam tubuh.

Berikut merupakan daftar variabel dan parameter yang digunakan dalam penelitian ini:

Tabel 1. Daftar Variabel

Variabel	Definisi	Satuan
$S(t)$	Jumlah individu rentan terinfeksi pada waktu ke -t.	Orang
$V(t)$	Jumlah individu yang telah melakukan vaksinasi.	Orang
$E(t)$	Jumlah individu yang memiliki gejala terinfeksi Covid-19 tetapi belum terkonfirmasi positif terpapar Covid-19.	Orang
$I(t)$	Jumlah individu terinfeksi Covid-19 pada waktu ke-t.	Orang
$R(t)$	Jumlah individu yang <i>Recovered</i> (sembuh/memiliki imunitas setelah di vaksinasi) pada waktu ke-t.	Orang
$N(t)$	Jumlah total keseluruhan populasi.	Orang

Tabel 2. Daftar parameter

Parameter	Definisi	Satuan
μ	Laju kelahiran dan kematian alami.	$\frac{1}{\text{waktu}}$
ρ	Laju individu yang telah melakukan vaksinasi.	$\frac{1}{\text{waktu}}$
β	Laju individu rentan menjadi individu <i>exposed</i> .	$\frac{1}{(\text{orang})(\text{waktu})}$
σ	Laju perpindahan individu <i>exposed</i> menjadi individu terinfeksi.	$\frac{1}{\text{waktu}}$
ω	Laju perpindahan dari individu yang telah melakukan	$\frac{1}{(\text{orang})(\text{waktu})}$

	vaksinasi menjadi individu <i>exposed</i> ..		
θ	Laju perpindahan individu terinfeksi menjadi individu <i>recovered</i> ..	$\frac{1}{\text{waktu}}$	
δ	Laju perpindahan individu yang telah melakukan vaksin dan tidak terinfeksi ke individu <i>recovered</i> ..	$\frac{1}{\text{waktu}}$	
γ	Laju perpindahan individu <i>exposed</i> kembali menjadi individu rentan.	$\frac{1}{\text{waktu}}$	
α	Laju kematian yang diakibatkan oleh terinfeksi Covid-19.	$\frac{1}{\text{waktu}}$	
m	Proporsi individu rentan yang telah melakukan vaksinasi. Syarat: $0 \leq m \leq 1$		

3. Membuat model SVEIR untuk penyebaran penyakit Covid-19.

Subpopulasi rentan jumlahnya bertambah seiring dengan laju kelahiran alami dari populasi dan laju perpindahan individu *exposed* menjadi individu rentan kembali. Subpopulasi rentan jumlahnya akan berkurang dipengaruhi oleh laju kematian alami, laju menjadi individu *exposed* karena berinteraksi dengan individu yang terinfeksi, dan laju individu yang telah melakukan vaksinasi dengan laju perpindahan sebesar (ρ) dengan proporsi sebesar m .

Subpopulasi vaksinasi bertambah dikarenakan individu rentan yang telah melakukan vaksinasi dengan laju perpindahan sebesar (ρ) dengan proporsi sebesar m . Jumlah subpopulasi vaksinasi berkurang dikarenakan laju perubahan individu vaksinasi yang berubah menjadi individu *exposed*, laju perpindahan individu vaksinasi yang menjadi individu *recovered*, dan laju kematian alami.

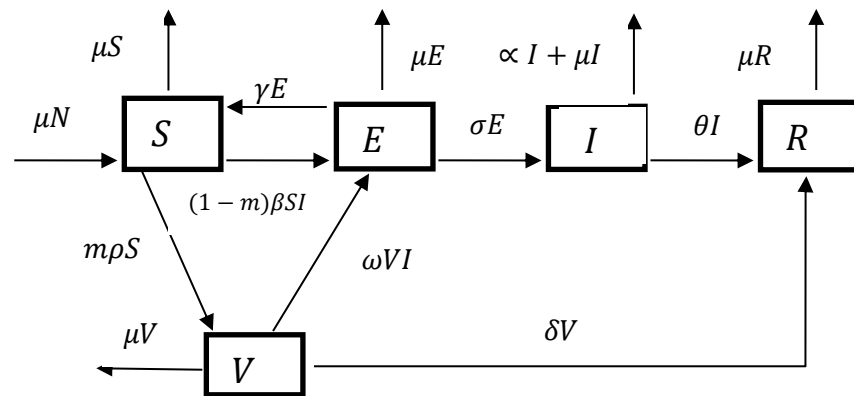
Subpopulasi *exposed* bertambah dikarenakan individu rentan berinteraksi dengan populasi terinfeksi, laju perpindahan individu vaksinasi menjadi individu *exposed*. Jumlah subpopulasi *exposed* akan berkurang disebabkan oleh laju kematian alami, laju perpindahan

individu *exposed* menjadi individu *Infected*, dan laju perpindahan individu *exposed* yang kembali menjadi individu rentan.

Subpopulasi *infected* bertambah dikarenakan perpindahan individu *exposed* menjadi individu *infected*. Subpopulasi *infected* akan berkurang karena perpindahan individu *infected* menjadi individu *recovered*, kematian alami dan kematian yang disebabkan oleh penyakit.

Subpopulasi *recovered* mengalami pertambahan dikarenakan laju perpindahan individu *infected* menjadi individu *recovered*, dan laju perpindahan individu vaksinasi menjadi individu *recovered*. Subpopulasi *recovered* berkurang dikarenakan tingkat kematian alami.

Berdasarkan asumsi yang digunakan, maka dapat dihasilkan kelompok populasi model epidemik SVEIR terhadap penyebaran penyakit Covid-19 sebagai berikut:



Gambar 4. Diagram Model Epidemik SVEIR.

4. Menentukan titik ekuilibrium model.

Pada tahap ini akan dilakukan pencarian pada titik ekuilibrium dari model. Mencari titik ekuilibrium dari model dapat menerapkan persamaan diferensial dari model dalam bentuk $f(x) = 0$, sehingga akhirnya didapatkan nilai dari setiap variabel yang merupakan titik ekuilibrium dari model penyebaran penyakit Covid-19. Model penyebaran penyakit pada umumnya memiliki dua titik ekuilibrium yaitu titik ekuilibrium bebas penyakit dan titik ekuilibrium endemik.

5. Analisis Bilangan Reproduksi Dasar (R_0)

Jika hasil analisis menunjukkan bahwa $R_0 < 1$ maka sistem hanya memiliki satu titik ekuilibrium yaitu ekuilibrium bebas penyakit yang bersifat stabil asimtotik lokal. Sedangkan apabila nilai $R_0 > 1$ maka sistem mempunyai dua titik ekuilibrium yaitu titik ekuilibrium bebas

penyakit yang tidak stabil dan titik ekuilibrium endemik yang stabil asimtotik lokal.

6. Analisis Kestabilan Titik Ekuilibrium

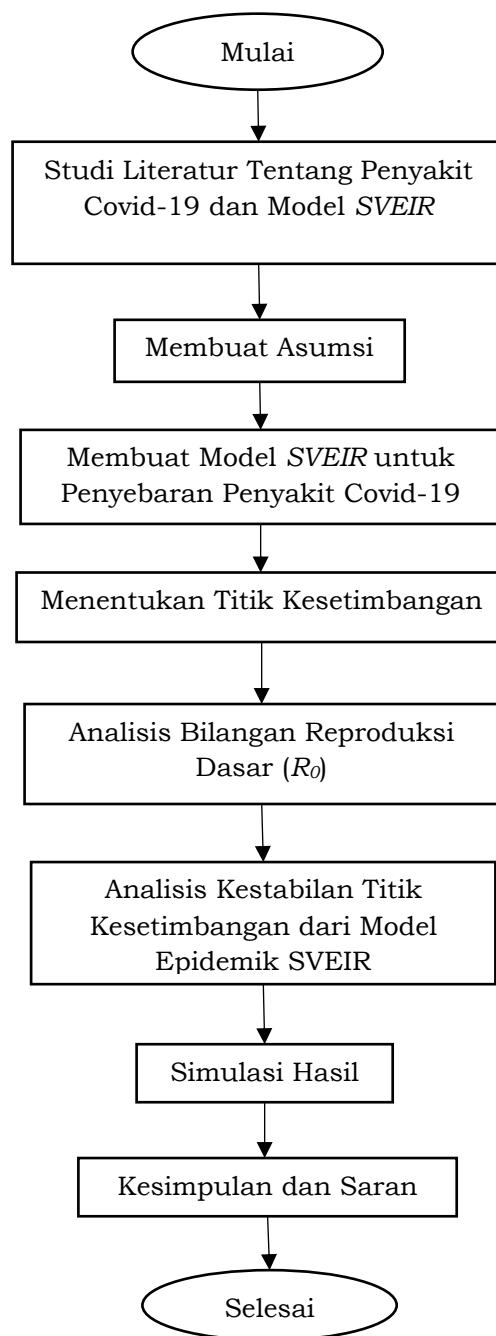
Pada langkah ini akan dilakukan untuk menganalisis kestabilan titik ekuilibrium dengan melakukan linearisasi pada sistem dengan menentukan matriks Jacobian di titik kesetimbangan. Kemudian diperoleh nilai eigen dari matriks Jacobian dan ditentukan sifat kestabilannya.

7. Simulasi Hasil

Simulasi hasil dilakukan dengan menggunakan *software* untuk memperoleh plot model penyebaran penyakit Covid-19 yang menunjukkan relasi antara variabel penelitian yang dipakai dalam membuat model.

3.3 Diagram Alir Penelitian

Berdasarkan langkah-langkah di atas, maka dapat dibentuk diagram alir penelitian seperti berikut:

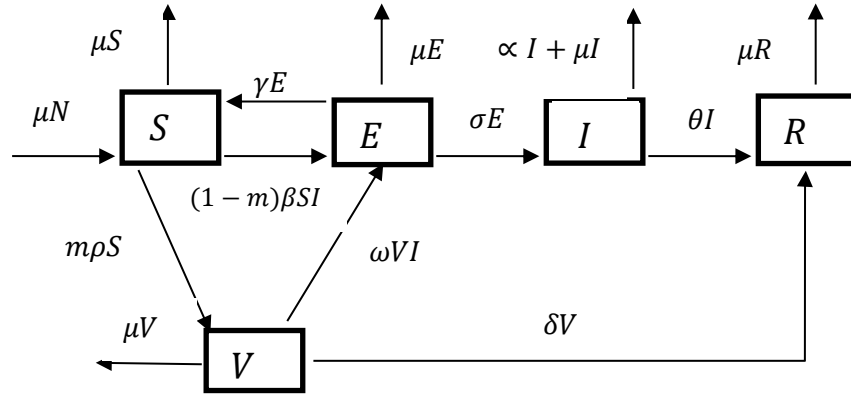


Gambar 5. Diagram Alir Penelitian.

IV. HASIL DAN PEMBAHASAN

4.1 Model SVEIR Pada Penyebaran Covid-19

Secara umum penyebaran penyakit Covid-19 dengan menggunakan vaksinasi pada suatu populasi dapat dideskripsikan dengan menggunakan diagram transfer seperti pada **Gambar 6**.



Gambar 6. Diagram Model Epidemik SVEIR.

Berdasarkan pada diagram transfer **Gambar 6** subpopulasi individu terbagi menjadi lima kategori, yaitu subpopulasi individu rentan (S), subpopulasi individu *Exposed* (E), subpopulasi individu yang telah melakukan Vaksinasi (V), subpopulasi individu *Infected* (I), subpopulasi individu *Recovered* (R).

Perubahan Subpopulasi Rentan (S) Terhadap Waktu

1. Jumlah subpopulasi rentan bertambah seiring dengan laju kelahiran alami pada populasi sebesar (μ). Laju kelahiran alami merupakan laju kelahiran bayi yang baru lahir, dan berperan sebagai menambah jumlah individu pada subpopulasi rentan.
2. Jumlah subpopulasi rentan bertambah dipengaruhi oleh adanya perpindahan individu *exposed* kembali menjadi individu rentan dikarenakan sudah tidak memiliki gejala terhadap penyakit Covid-19 dengan laju perpindahan sebesar (γ).
3. Jumlah subpopulasi rentan berkurang karena adanya interaksi individu rentan dengan individu terinfeksi penyakit Covid-19 dan berpindah menjadi individu *exposed* dengan laju perpindahan sebesar (β) dan proporsi sebesar ($1 - m$).
4. Jumlah subpopulasi rentan akan berkurang dipengaruhi oleh populasi yang telah melakukan vaksinasi dengan laju perpindahan sebesar (ρ) dengan proporsi sebesar m . Jumlah subpopulasi rentan akan berkurang seiring dengan jumlah kematian alami pada populasi sebesar (μ).

Berdasarkan penjelasan di atas, maka dapat dibentuk model matematisnya adalah:

$$\frac{dS}{dt} = \mu N + \gamma E - (1 - m)\beta IS - m\rho S - \mu S$$

Perubahan Subpopulasi Vaksinasi (V) Terhadap Waktu

1. Jumlah subpopulasi vaksinasi bertambah dikarenakan adanya individu rentan yang telah melakukan vaksinasi dengan laju perpindahan sebesar (ρ) dan proporsi sebesar (m).
2. Jumlah subpopulasi vaksinasi berkurang dikarenakan terjadi perpindahan individu yang telah melakukan vaksinasi ke individu *exposed* disebabkan adanya interaksi individu yang telah vaksinasi dengan individu yang terinfeksi penyakit dengan laju perpindahan sebesar (ω).
3. Jumlah subpopulasi vaksinasi berkurang dikarenakan adanya perpindahan individu yang telah melakukan vaksin menjadi individu *recovered* disebabkan individu yang telah melakukan vaksinasi tidak berinteraksi dengan individu yang terinfeksi penyakit dengan laju perpindahan sebesar (δ).
4. Jumlah subpopulasi vaksinasi akan berkurang seiring dengan jumlah kematian alami pada populasi sebesar (μ).

Berdasarkan penjelasan di atas, maka dapat dibentuk model matematisnya adalah:

$$\frac{dV}{dt} = m\rho S - (\mu + \delta + \omega I)V$$

Perubahan Subpopulasi *Exposed* (E) Terhadap Waktu

1. Jumlah subpopulasi *exposed* bertambah dikarenakan individu rentan berinteraksi dengan individu terinfeksi dengan laju perpindahan sebesar β dan proporsi sebesar ($1 - k$).
2. Jumlah subpopulasi *exposed* bertambah dikarenakan populasi yang telah melakukan vaksinasi berinteraksi dengan populasi yang terinfeksi dengan laju perpindahan sebesar (ω).
3. Jumlah subpopulasi *exposed* berkurang dikarenakan individu *exposed* berpindah menjadi individu *Infected* dengan laju perpindahan sebesar (σ).
4. Jumlah subpopulasi *exposed* berkurang dikarenakan individu *exposed* berpindah menjadi individu rentan kembali dikarenakan individu *exposed*

sudah tidak memiliki gejala terhadap penyakit dengan laju perpindahan sebesar (γ) .

5. Jumlah subpopulasi *exposed* akan berkurang seiring dengan jumlah kematian alami pada populasi sebesar (μ) .

Berdasarkan penjelasan di atas, maka dapat dibentuk model matematisnya adalah:

$$\frac{dE}{dt} = (1 - m)\beta SI + \omega VI - \sigma E - \gamma E - \mu E$$

Perubahan Subpopulasi *Infected* (I) Terhadap Waktu

1. Jumlah subpopulasi *infected* bertambah dikarenakan perubahan populasi *exposed* menjadi populasi *infected* dengan laju perpindahan sebesar (σ) .
2. Jumlah subpopulasi *infected* akan berkurang karena perubahan populasi *infected* menjadi populasi *recovered* dengan laju perpindahan sebesar (θ) .
3. Jumlah subpopulasi *infected* berkurang disebabkan kematian terhadap penyakit dengan laju sebesar (α) .
4. Jumlah subpopulasi *infected* akan berkurang seiring dengan jumlah kematian alami pada populasi sebesar (μ) .

Berdasarkan penjelasan di atas, maka dapat dibentuk model matematisnya adalah:

$$\frac{dI}{dt} = \sigma E - (\mu + \theta + \alpha)I$$

Perubahan Subpopulasi *Recovered* (R) Terhadap Waktu

1. Jumlah subpopulasi *recovered* mengalami pertambahan dikarenakan perpindahan populasi *infected* menjadi populasi *recovered* dengan laju sebesar (θ) .
2. Jumlah subpopulasi *recovered* bertambah dikarenakan perpindahan populasi vaksinasi yang tidak berinteraksi dengan populasi *infected* sehingga tidak mengalami infeksi penyakit dengan laju perpindahan sebesar (δ) .
3. Jumlah subpopulasi *recovered* akan berkurang seiring dengan jumlah kematian alami pada populasi sebesar (μ) .

Berdasarkan penjelasan di atas, maka dapat dibentuk model matematisnya adalah:

$$\frac{dR}{dt} = \theta I + \delta V - \mu R$$

Berdasarkan penjelasan di atas, maka dapat diperoleh model penyebaran penyakit Covid-19 dengan penggunaan vaksin dalam bentuk sistem persamaan diferensial non-linear seperti berikut:

$$\begin{aligned}
 \frac{dS}{dt} &= \mu N + \gamma E - (1-m)\beta IS - m\rho S - \mu S \\
 \frac{dV}{dt} &= m\rho S - (\mu + \delta + \omega I)V \\
 \frac{dE}{dt} &= (1-m)\beta SI + \omega VI - (\sigma + \gamma + \mu)E \\
 \frac{dI}{dt} &= \sigma E - (\mu + \theta + \alpha)I \\
 \frac{dR}{dt} &= \theta I + \delta V - \mu R
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

Dimana $N = S + V + E + I + R$ menyatakan total populasi pada waktu tertentu dan dapat ditunjukkan dengan cara menjumlahkan persamaan (4.1) maka di peroleh

$$\begin{aligned}
 \frac{dS}{dt} + \frac{dV}{dt} + \frac{dE}{dt} + \frac{dI}{dt} + \frac{dR}{dt} &= \mu N - \mu S - \mu V - \mu E - \mu I - \mu R - \alpha I \\
 \frac{d(S + V + E + I + R)}{dt} &= \mu N - \mu(S + V + E + I + R) - \alpha I \\
 \frac{dN}{dt} &= \mu N - \mu N - \alpha I \\
 \frac{dN}{dt} &= -\alpha I \\
 dN &= -\alpha I(t)dt \\
 \int dN &= \int -\alpha I(t)dt \\
 N &= e^{-\alpha I}
 \end{aligned}$$

Dari hasil di atas dapat disimpulkan bahwasanya persamaan (4.1) memenuhi asumsi yang dinyatakan sebelumnya bahwasanya banyak individu dalam populasi adalah tidak konstan. Jumlah total populasi dipengaruhi oleh laju kematian terhadap penyakit dengan laju sebesar (α) . Tanda negatif pada persamaan di atas menandakan pengurangan populasi seiring dengan laju kematian terhadap penyakit.

4.2. Analisis Dinamik dari Model

Titik (S, V, E, I, R) merupakan titik ekuilibrium dari sistem persamaan (4.1) jika memenuhi persamaan $\frac{dS}{dt} = 0, \frac{dV}{dt} = 0, \frac{dE}{dt} = 0, \frac{dI}{dt} = 0, \frac{dR}{dt} = 0$ maka sistem persamaan (4.1) dapat ditulis:

$$\mu N + \gamma E - (1-m)\beta IS - m\rho S - \mu S = 0 \tag{4.2}$$

$$m\rho S - (\mu + \delta + \omega I)V = 0 \tag{4.3}$$

$$(1 - m)\beta SI + \omega VI - (\sigma + \gamma + \mu)E = 0 \quad (4.4)$$

$$\sigma E - (\mu + \theta + \alpha)I = 0 \quad (4.5)$$

$$\theta I + \delta V - \mu R = 0 \quad (4.6)$$

Model penyebaran penyakit umumnya memiliki dua titik ekuilibrium pada satu sistem persamaan yaitu titik ekuilibrium bebas penyakit dan titik ekuilibrium endemik.

4.2.1. Titik Ekuilibrium Bebas Penyakit

Titik ekuilibrium bebas penyakit diperoleh ketika tidak ada penyakit di dalam populasi. Agar memperoleh titik ekuilibrium bebas penyakit, maka tidak ada individu yang terinfeksi atau menularkan penyakit di dalam populasi sehingga $I = 0$. Substitusi $I = 0$ ke dalam persamaan (4.4).

$$\begin{aligned} (1 - m)\beta SI + \omega VI - \sigma E - \gamma E - \mu E &= 0 \\ (1 - m)\beta S(0) + \omega V(0) - \sigma E - \gamma E - \mu E &= 0 \\ 0 - (\mu + \sigma + \gamma)E &= 0 \\ E &= \frac{0}{-(\mu + \sigma + \gamma)} \\ E &= 0 \end{aligned} \quad (4.7)$$

Selanjutnya substitusi $I = 0$ dan persamaan (4.7) ke dalam persamaan (4.2), diperoleh

$$\begin{aligned} \mu N + \gamma E - (1 - m)\beta IS - m\rho S - \mu S &= 0 \\ \mu N + \gamma(0) - (1 - m)\beta S(0) - m\rho S - \mu S &= 0 \\ \mu N - m\rho S - \mu S &= 0 \\ -(m\rho + \mu)S &= -\mu N \\ S &= \frac{\mu N}{m\rho + \mu} \end{aligned} \quad (4.8)$$

Selanjutnya substitusi $I = 0$, dan persamaan (4.8) ke persamaan (4.3), diperoleh

$$\begin{aligned} m\rho S - (\mu + \delta + \omega I)V &= 0 \\ m\rho \left(\frac{\mu N}{m\rho + \mu} \right) - ((\mu + \delta + \omega(0))V &= 0 \\ \frac{m\rho\mu N}{m\rho + \mu} - (\delta + \mu)V &= 0 \\ V &= \frac{m\rho\mu N}{(m\rho + \mu)(\delta + \mu)} \end{aligned} \quad (4.9)$$

Selanjutnya substitusikan $I = 0$, dan persamaan (4.9) ke persamaan (4.6), diperoleh

$$\begin{aligned} \theta I + \delta V - \mu R &= 0 \\ \theta(0) + \delta \left(\frac{m\rho\mu N}{(m\rho + \mu)(\delta + \mu)} \right) - \mu R &= 0 \\ \delta \left(\frac{m\rho\mu N}{(m\rho + \mu)(\delta + \mu)} \right) - \mu R &= 0 \end{aligned}$$

$$R = \frac{\delta m \rho \mu N}{\mu(m\rho + \mu)(\delta + \mu)} \quad (4.10)$$

Sehingga diperoleh titik ekuilibrium bebas penyakit sebagai berikut:

$$E_0 = (S, V, E, I, R) = \left(\frac{\mu N}{m\rho + \mu}, \frac{m\rho \mu N}{(m\rho + \mu)(\delta + \mu)}, 0, 0, \frac{\delta m \rho \mu N}{\mu(m\rho + \mu)(\delta + \mu)} \right) \quad (4.11)$$

4.2.2. Basic Reproduction Number

Basic reproduction number didapatkan dengan cara mencari nilai eigen yang diperoleh dari *Next generation matriks* dari sistem persamaan (4.1), *Next generation matriks* diperoleh dari model persamaan subsistem terinfeksi. Pada model ini subsistem terinfeksi terdapat pada kelas *exposed* (E) dan *infected* (I). Maka persamaan diferensial yang dipakai yaitu:

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= (1 - m)\beta SI + \omega VI - (\sigma + \gamma + \mu)E \\ \frac{dI}{dt} &= \sigma E - (\mu + \theta + \alpha)I \end{aligned} \quad (4.12)$$

Matriks jacobian dari (4.12) adalah

$$J = \begin{pmatrix} -(\sigma + \gamma + \mu) & (1 - m)\beta S + \omega V \\ \sigma & -(\mu + \theta + \alpha) \end{pmatrix}$$

Matriks jacobian di atas dapat ditulis menjadi $F + V = J$, dengan F merupakan matriks transmisi, matriks yang menyatakan laju penularan penyakit, sedangkan V merupakan matriks transisi ialah matriks yang menyatakan laju perpindahan keluar masuk subpopulasi terinfeksi. sehingga

$$F = \begin{bmatrix} 0 & (1 - m)\beta S + \omega V \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ dan } V = \begin{bmatrix} -(\sigma + \gamma + \mu) & 0 \\ \sigma & -(\mu + \theta + \alpha) \end{bmatrix}$$

R_0 didefinisikan merupakan nilai eigen terbesar dari *Next Generation Matrices*(NGM)

$$K = -FV^{-1}$$

selanjutnya akan dicari terlebih dahulu invers dari matrik V:

$$\begin{aligned} V &= \begin{bmatrix} -(\sigma + \gamma + \mu) & 0 \\ \sigma & -(\mu + \theta + \alpha) \end{bmatrix} \\ V^{-1} &= \frac{1}{(-(\sigma + \gamma + \mu))(-(\mu + \theta + \alpha)) - ((\sigma)(0))} \begin{bmatrix} -(\mu + \theta + \alpha) & 0 \\ -\sigma & -(\sigma + \gamma + \mu) \end{bmatrix} \\ V^{-1} &= \frac{1}{(\sigma + \gamma + \mu)(\mu + \theta + \alpha)} \begin{bmatrix} -(\mu + \theta + \alpha) & 0 \\ -\sigma & -(\sigma + \gamma + \mu) \end{bmatrix} \\ V^{-1} &= \begin{bmatrix} -\frac{(\mu + \theta + \alpha)}{(\sigma + \gamma + \mu)(\mu + \theta + \alpha)} & 0 \\ -\frac{\sigma}{(\sigma + \gamma + \mu)(\mu + \theta + \alpha)} & -\frac{(\sigma + \gamma + \mu)}{(\sigma + \gamma + \mu)(\mu + \theta + \alpha)} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$V^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{(\sigma + \gamma + \mu)} & 0 \\ \frac{\sigma}{(\sigma + \gamma + \mu)(\mu + \theta + \alpha)} & -\frac{1}{(\mu + \theta + \alpha)} \end{bmatrix}$$

Next Generation Matrices (NGM) dianalisis pada titik ekuilibrium bebas penyakit $E_0 = (S, V, E, I, R) = \left(\frac{\mu N}{m\rho + \mu}, \frac{m\rho\mu N}{(m\rho + \mu)(\delta + \mu)}, 0, 0, \frac{\delta m\rho\mu N}{\mu(m\rho + \mu)(\delta + \mu)} \right)$ sehingga

$$K = -FV^{-1}$$

$$K = - \begin{bmatrix} 0 & (1-m)\beta\sigma + \omega V \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{(\sigma + \gamma + \mu)} & 0 \\ \frac{\sigma}{(\sigma + \gamma + \mu)(\mu + \theta + \alpha)} & -\frac{1}{(\mu + \theta + \alpha)} \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} \left(\frac{(1-m)\beta\mu N}{m\rho + \mu} + \frac{\omega m\rho\mu N}{(m\rho + \mu)(\delta + \mu)} \right) \sigma & \left(\frac{(1-m)\beta\mu N}{m\rho + \mu} + \frac{\omega m\rho\mu N}{(m\rho + \mu)(\delta + \mu)} \right) \\ \frac{(\sigma + \gamma + \mu)(\mu + \theta + \alpha)}{0} & \frac{\mu + \theta + \alpha}{0} \end{bmatrix}$$

Untuk memperoleh nilai eigen dari matriks K di dapatkan dari persamaan berikut:

$$\det(\lambda I - FV^{-1}) = 0$$

$$\begin{aligned} &= \begin{vmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \left(\frac{(1-m)\beta\mu N}{m\rho + \mu} + \frac{\omega m\rho\mu N}{(m\rho + \mu)(\delta + \mu)} \right) \sigma & \left(\frac{(1-m)\beta\mu N}{m\rho + \mu} + \frac{\omega m\rho\mu N}{(m\rho + \mu)(\delta + \mu)} \right) \\ \frac{(\sigma + \gamma + \mu)(\mu + \theta + \alpha)}{0} & \frac{\mu + \theta + \alpha}{0} \end{vmatrix} \\ &= \left| \lambda - \frac{\left(\frac{(1-m)\beta\mu N}{m\rho + \mu} + \frac{\omega m\rho\mu N}{(m\rho + \mu)(\delta + \mu)} \right) \sigma}{\frac{(\sigma + \gamma + \mu)(\mu + \theta + \alpha)}{0}} - \frac{\left(\frac{(1-m)\beta\mu N}{m\rho + \mu} + \frac{\omega m\rho\mu N}{(m\rho + \mu)(\delta + \mu)} \right)}{\frac{\mu + \theta + \alpha}{\lambda}} \right| \\ &= \left| \lambda - \frac{\left(\frac{(1-m)\beta\mu N}{m\rho + \mu} + \frac{\omega m\rho\mu N}{(m\rho + \mu)(\delta + \mu)} \right) \sigma}{\frac{(\sigma + \gamma + \mu)(\mu + \theta + \alpha)}{0}} - \frac{\left(\frac{(1-m)\beta\mu N}{m\rho + \mu} + \frac{\omega m\rho\mu N}{(m\rho + \mu)(\delta + \mu)} \right)}{\frac{\mu + \theta + \alpha}{\lambda}} \right| = 0 \\ &= \left[\left(\lambda - \frac{\left(\frac{(1-m)\beta\mu N}{m\rho + \mu} + \frac{\omega m\rho\mu N}{(m\rho + \mu)(\delta + \mu)} \right) \sigma}{(\sigma + \gamma + \mu)(\mu + \theta + \alpha)} \right) (\lambda) \right] - \left[\left(-\frac{\left(\frac{(1-m)\beta\mu N}{m\rho + \mu} + \frac{\omega m\rho\mu N}{(m\rho + \mu)(\delta + \mu)} \right)}{\mu + \theta + \alpha} \right) (0) \right] \\ &\det(\lambda I - FV^{-1}) = \left(\lambda - \frac{\left(\frac{(1-m)\beta\mu N}{m\rho + \mu} + \frac{\omega m\rho\mu N}{(m\rho + \mu)(\delta + \mu)} \right) \sigma}{(\sigma + \gamma + \mu)(\mu + \theta + \alpha)} \right) (\lambda) \end{aligned}$$

Sehingga diperoleh $\lambda_1 = 0$ dan $\lambda_2 = \frac{\left(\frac{(1-m)\beta\mu N}{m\rho + \mu} + \frac{\omega m\rho\mu N}{(m\rho + \mu)(\delta + \mu)} \right) \sigma}{(\sigma + \gamma + \mu)(\mu + \theta + \alpha)}$

Basic reproduction number diperoleh dari radius spectral atau nilai eigen terbesar dari matriks, sehingga diperoleh:

$$R_0 = \frac{\left(\frac{(1-m)\beta\mu N}{m\rho + \mu} + \frac{\omega m\rho\mu N}{(m\rho + \mu)(\delta + \mu)} \right) \sigma}{(\sigma + \gamma + \mu)(\mu + \theta + \alpha)}$$

$$R_0 = \frac{(1-m)\beta\mu N\sigma(\delta + \mu) + \omega m\rho\mu N\sigma}{(m\rho + \mu)(\delta + \mu)(\sigma + \gamma + \mu)(\mu + \theta + \alpha)}$$

4.2.3. Kestabilan Titik Ekuilibrium Bebas Penyakit

Sistem persamaan (4.1) merupakan sistem persamaan diferensial non-linear. Untuk menganalisis kestabilan titik ekuilibrium pada suatu sistem persamaan diferensial non-linear dapat ditemukan dengan cara melinearkan persamaan diferensial tersebut. Analisis kestabilan titik ekuilibrium dapat ditentukan dengan cara menemukan nilai eigen dari matriks jacobian yang diperoleh melalui linearisasi sistem di sekitar titik-titik ekuilibrium dari sistem (4.1).

$$f_1(S, V, E, I, R) \quad \mu N + \gamma E - (1-m)\beta IS - m\rho S - \mu S \quad (4.13)$$

$$f_2(S, V, E, I, R) \quad m\rho S - (\mu + \delta + \omega I)V \quad (4.14)$$

$$f_3(S, V, E, I, R) \quad (1-m)\beta SI + \omega VI - (\sigma + \gamma + \mu)E \quad (4.15)$$

$$f_4(S, V, E, I, R) \quad \sigma E - (\mu + \theta + \alpha)I \quad (4.16)$$

$$f_5(S, V, E, I, R) \quad \theta I + \delta V - \mu R \quad (4.17)$$

Kelima persamaan di atas dapat dilinearisasikan seperti berikut:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1(S, V, E, I, R)}{\partial S} &= -(1-m)\beta I - m\rho - \mu & \frac{\partial f_2(S, V, E, I, R)}{\partial S} &= m\rho \\ \frac{\partial f_1(S, V, E, I, R)}{\partial V} &= 0 & \frac{\partial f_2(S, V, E, I, R)}{\partial V} &= -(\omega I + \delta + \mu) \\ \frac{\partial f_1(S, V, E, I, R)}{\partial E} &= \gamma & \frac{\partial f_2(S, V, E, I, R)}{\partial E} &= 0 \\ \frac{\partial f_1(S, V, E, I, R)}{\partial I} &= -(1-m)\beta S & \frac{\partial f_2(S, V, E, I, R)}{\partial I} &= \omega V \\ \frac{\partial f_1(S, V, E, I, R)}{\partial R} &= 0 & \frac{\partial f_2(S, V, E, I, R)}{\partial R} &= 0 \\ \\ \frac{\partial f_3(S, V, E, I, R)}{\partial S} &= (1-m)\beta I & \frac{\partial f_4(S, V, E, I, R)}{\partial S} &= 0 \\ \frac{\partial f_3(S, V, E, I, R)}{\partial V} &= \omega I & \frac{\partial f_4(S, V, E, I, R)}{\partial V} &= 0 \\ \frac{\partial f_3(S, V, E, I, R)}{\partial E} &= -(\sigma + \gamma + \mu) & \frac{\partial f_4(S, V, E, I, R)}{\partial E} &= \sigma \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f_3(S, V, E, I, R)}{\partial I} &= (1-m)\beta S + \omega V & \frac{\partial f_4(S, V, E, I, R)}{\partial I} &= -\theta - \alpha - \mu \\
\frac{\partial f_3(S, V, E, I, R)}{\partial R} &= 0 & \frac{\partial f_4(S, V, E, I, R)}{\partial R} &= 0 \\
\frac{\partial f_5(S, V, E, I, R)}{\partial S} &= 0 \\
\frac{\partial f_5(S, V, E, I, R)}{\partial V} &= \delta \\
\frac{\partial f_5(S, V, E, I, R)}{\partial E} &= 0 \\
\frac{\partial f_5(S, V, E, I, R)}{\partial I} &= \sigma \\
\frac{\partial f_5(S, V, E, I, R)}{\partial R} &= -\mu
\end{aligned}$$

Maka didapatkan matriks jacobian sebagai berikut:

$$J_0 = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(S, V, E, I, R)}{\partial S} & \frac{\partial f_1(S, V, E, I, R)}{\partial V} & \frac{\partial f_1(S, V, E, I, R)}{\partial E} & \frac{\partial f_1(S, V, E, I, R)}{\partial I} & \frac{\partial f_1(S, V, E, I, R)}{\partial R} \\ \frac{\partial f_2(S, V, E, I, R)}{\partial S} & \frac{\partial f_2(S, V, E, I, R)}{\partial V} & \frac{\partial f_2(S, V, E, I, R)}{\partial E} & \frac{\partial f_2(S, V, E, I, R)}{\partial I} & \frac{\partial f_2(S, V, E, I, R)}{\partial R} \\ \frac{\partial f_3(S, V, E, I, R)}{\partial S} & \frac{\partial f_3(S, V, E, I, R)}{\partial V} & \frac{\partial f_3(S, V, E, I, R)}{\partial E} & \frac{\partial f_3(S, V, E, I, R)}{\partial I} & \frac{\partial f_3(S, V, E, I, R)}{\partial R} \\ \frac{\partial f_4(S, V, E, I, R)}{\partial S} & \frac{\partial f_4(S, V, E, I, R)}{\partial V} & \frac{\partial f_4(S, V, E, I, R)}{\partial E} & \frac{\partial f_4(S, V, E, I, R)}{\partial I} & \frac{\partial f_4(S, V, E, I, R)}{\partial R} \\ \frac{\partial f_5(S, V, E, I, R)}{\partial S} & \frac{\partial f_5(S, V, E, I, R)}{\partial V} & \frac{\partial f_5(S, V, E, I, R)}{\partial E} & \frac{\partial f_5(S, V, E, I, R)}{\partial I} & \frac{\partial f_5(S, V, E, I, R)}{\partial R} \end{pmatrix}$$

$$J_0 = \begin{pmatrix} -(1-m)\beta I - m\rho - \mu & 0 & \gamma & -(1-m)\beta S & 0 \\ m\rho & -(\omega I + \delta + \mu) & 0 & \omega V & 0 \\ (1-m)\beta I & \omega I & -(\sigma + \gamma + \mu) & (1-m)\beta S + \omega V & 0 \\ 0 & 0 & \sigma & -\theta - \alpha - \mu & 0 \\ 0 & \delta & 0 & \sigma & -\mu \end{pmatrix} \quad (4.18)$$

Titik ekuilibrium bebas penyakit $E_0 = (S, V, E, I, R) = \left(\frac{\mu N}{m\rho + \mu}, \frac{m\rho\mu N}{(m\rho + \mu)(\delta + \mu)}, 0, 0, \frac{\delta m\rho\mu N}{\mu(m\rho + \mu)(\delta + \mu)} \right)$ disubstitusikan ke persamaan (4.18), sehingga diperoleh matriks jacobian di sekitar titik ekuilibrium bebas penyakit seperti berikut:

$$J_0 = \begin{pmatrix} -(1-m)\beta(0) - m\rho - \mu & 0 & \gamma & -(1-m)\beta \left(\frac{\mu N}{m\rho + \mu} \right) & 0 \\ m\rho & -(\omega(0) + \delta + \mu) & 0 & \omega \left(\frac{m\rho\mu N}{(m\rho + \mu)(\delta + \mu)} \right) & 0 \\ (1-m)\beta(0) & \omega(0) & -(\sigma + \gamma + \mu) & (1-m)\beta \left(\frac{\mu N}{m\rho + \mu} \right) + \omega \left(\frac{m\rho\mu N}{(m\rho + \mu)(\delta + \mu)} \right) & 0 \\ 0 & 0 & \sigma & -\theta - \alpha - \mu & 0 \\ 0 & \delta & 0 & \sigma & -\mu \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -m\rho - \mu & 0 & \gamma & -\frac{(1-m)\beta\mu N}{m\rho + \mu} & 0 \\ m\rho & -(\delta + \mu) & 0 & \frac{\omega m\rho\mu N}{(m\rho + \mu)(\delta + \mu)} & 0 \\ 0 & 0 & -(\sigma + \gamma + \mu) & \frac{(1-m)\beta\mu N}{m\rho + \mu} + \frac{\omega m\rho\mu N}{(m\rho + \mu)(\delta + \mu)} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma & -\theta - \alpha - \mu & 0 \\ 0 & \delta & 0 & \sigma & -\mu \end{pmatrix}$$

Suatu titik ekuilibrium dinyatakan stabil apabila semua nilai eigen dari matriks jacobian yang diperoleh bernilai negatif. Nilai eigen dari matriks J_0 dapat di cari dengan menemukan akar-akar dari persamaan karakteristik yang diperoleh dari persamaan berikut

$$\det(\lambda I - J_0) = 0$$

$$\left| \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -m\rho - \mu & 0 & \gamma & -\frac{(1-m)\beta\mu N}{m\rho + \mu} & 0 \\ m\rho & -(\delta + \mu) & 0 & \frac{\omega m\rho\mu N}{(m\rho + \mu)(\delta + \mu)} & 0 \\ 0 & 0 & -(\sigma + \gamma + \mu) & \frac{(1-m)\beta\mu N}{m\rho + \mu} + \frac{\omega m\rho\mu N}{(m\rho + \mu)(\delta + \mu)} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma & -\theta - \alpha - \mu & 0 \\ 0 & \delta & 0 & \sigma & -\mu \end{pmatrix} \right| = 0$$

$$\begin{vmatrix} \lambda + m\rho + \mu & 0 & -\gamma & \frac{(1-m)\beta\mu N}{m\rho + \mu} & 0 \\ -m\rho & \lambda + \delta + \mu & 0 & -\frac{\omega m\rho\mu N}{(m\rho + \mu)(\delta + \mu)} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda + \sigma + \gamma + \mu & -\left(\frac{(1-m)\beta\mu N}{m\rho + \mu} + \frac{\omega m\rho\mu N}{(m\rho + \mu)(\delta + \mu)}\right) & 0 \\ 0 & 0 & -\sigma & \lambda + \theta + \alpha + \mu & 0 \\ 0 & -\delta & 0 & -\sigma & \lambda + \mu \end{vmatrix} = 0$$

$$(\lambda + \mu) \begin{vmatrix} \lambda + m\rho + \mu & 0 & -\gamma & \frac{(1-m)\beta\mu N}{m\rho + \mu} \\ -m\rho & \lambda + \delta + \mu & 0 & -\frac{\omega m\rho\mu N}{(m\rho + \mu)(\delta + \mu)} \\ 0 & 0 & \lambda + \sigma + \gamma + \mu & -\left(\frac{(1-m)\beta\mu N}{m\rho + \mu} + \frac{\omega m\rho\mu N}{(m\rho + \mu)(\delta + \mu)}\right) \\ 0 & 0 & -\sigma & \lambda + \theta + \alpha + \mu \end{vmatrix}$$

$$(\lambda + \mu)(\lambda + \delta + \mu) \begin{vmatrix} \lambda + m\rho + \mu & -\gamma & \frac{(1-m)\beta\mu N}{m\rho + \mu} \\ 0 & \lambda + \sigma + \gamma + \mu & -\left(\frac{(1-m)\beta\mu N}{m\rho + \mu} + \frac{\omega m\rho\mu N}{(m\rho + \mu)(\delta + \mu)}\right) \\ 0 & -\sigma & \lambda + \theta + \alpha + \mu \end{vmatrix}$$

$$(\lambda + \mu)(\lambda + \delta + \mu)(\lambda + m\rho + \mu) \begin{vmatrix} \lambda + \sigma + \gamma + \mu & -\left(\frac{(1-m)\beta\mu N}{m\rho + \mu} + \frac{\omega m\rho\mu N}{(m\rho + \mu)(\delta + \mu)}\right) \\ -\sigma & \lambda + \theta + \alpha + \mu \end{vmatrix}$$

$$(\lambda + \mu)(\lambda + \delta + \mu)(\lambda + m\rho + \mu) \left[(\lambda + \sigma + \gamma + \mu)(\lambda + \theta + \alpha + \mu) - \left(\left(-\frac{(1-m)\beta\mu N}{m\rho + \mu} - \frac{\omega m\rho\mu N}{(m\rho + \mu)(\delta + \mu)} \right) (-\sigma) \right) \right] = 0 \quad (4.19)$$

Dari persamaan (4.19) diperoleh

- $\lambda + \mu = 0 \rightarrow \lambda_1 = -\mu$
- $\lambda + \delta + \mu = 0 \rightarrow \lambda_2 = -\delta - \mu$
- $\lambda + m\rho + \mu = 0 \rightarrow \lambda_3 = -m\rho - \mu$
- Nilai eigen λ_4 dan λ_5 dapat diperoleh dari solusi

$$(\lambda + \sigma + \gamma + \mu)(\lambda + \theta + \alpha + \mu) - \left(\left(-\frac{(1-m)\beta\mu N}{m\rho + \mu} - \frac{\omega m\rho\mu N}{(m\rho + \mu)(\delta + \mu)} \right) (-\sigma) \right) = 0 \quad (4.20)$$

$$\lambda^2 + (\sigma + \gamma + \theta + \alpha + 2\mu)\lambda + (\sigma + \gamma + \mu)(\theta + \alpha + \mu) - \frac{(1-m)\beta\mu N\sigma}{m\rho + \mu} - \frac{\omega m\rho\mu N\sigma}{(m\rho + \mu)(\delta + \mu)} = 0$$

Berdasarkan sifat persamaan kuadrat, λ_4 dan λ_5 sebagai solusi persamaan (4.20) akan berbeda tanda jika,

$$(\sigma + \gamma + \mu)(\theta + \alpha + \mu) - \frac{(1-m)\beta\mu N\sigma}{m\rho + \mu} - \frac{\omega m\rho\mu N\sigma}{(m\rho + \mu)(\delta + \mu)} < 0$$

$$- \left(\frac{(1-m)\beta\mu N\sigma}{m\rho + \mu} + \frac{\omega m\rho\mu N\sigma}{(m\rho + \mu)(\delta + \mu)} \right) < -[(\sigma + \gamma + \mu)(\theta + \alpha + \mu)]$$

$$\frac{\left(\frac{(1-m)\beta\mu N\sigma}{m\rho + \mu} + \frac{\omega m\rho\mu N\sigma}{(m\rho + \mu)(\delta + \mu)} \right)}{(\sigma + \gamma + \mu)(\theta + \alpha + \mu)} > 1$$

$$R_0 > 1$$

Dengan demikian, dapat dikatakan bahwa jika $(\sigma + \gamma + \mu)(\theta + \alpha + \mu) - \frac{(1-m)\beta\mu N\sigma}{m\rho + \mu} - \frac{\omega m\rho\mu N\sigma}{(m\rho + \mu)(\delta + \mu)} < 0$ atau $R_0 > 1$ maka persamaan (4.20) akan memiliki sebuah nilai eigen positif. Oleh karena itu titik ekuilibrium bebas penyakit tidak stabil jika

$$(\sigma + \gamma + \mu)(\theta + \alpha + \mu) - \frac{(1-m)\beta\mu N\sigma}{m\rho + \mu} - \frac{\omega m\rho\mu N\sigma}{(m\rho + \mu)(\delta + \mu)} < 0$$

λ_4 dan λ_5 merupakan solusi dari persamaan (4.20) akan sama tanda jika,

$$(\sigma + \gamma + \mu)(\theta + \alpha + \mu) - \frac{(1-m)\beta\mu N\sigma}{m\rho + \mu} - \frac{\omega m\rho\mu N\sigma}{(m\rho + \mu)(\delta + \mu)} > 0$$

$$- \left(\frac{(1-m)\beta\mu N\sigma}{m\rho + \mu} + \frac{\omega m\rho\mu N\sigma}{(m\rho + \mu)(\delta + \mu)} \right) > -[(\sigma + \gamma + \mu)(\theta + \alpha + \mu)]$$

$$\frac{\left(\frac{(1-m)\beta\mu N\sigma}{m\rho + \mu} + \frac{\omega m\rho\mu N\sigma}{(m\rho + \mu)(\delta + \mu)} \right)}{(\sigma + \gamma + \mu)(\theta + \alpha + \mu)} < 1$$

$$R_0 < 1$$

Dengan demikian, dapat dikatakan bahwa jika $R_0 < 1$ jika dan hanya jika $(\sigma + \gamma + \mu)(\theta + \alpha + \mu) - \frac{(1-m)\beta\mu N\sigma}{m\rho + \mu} - \frac{\omega m\rho\mu N\sigma}{(m\rho + \mu)(\delta + \mu)} > 0$. Maka persamaan (4.20) bisa jadi akan memiliki nilai eigen yang bernilai sama, baik sama-sama bernilai negatif atau sama-sama bernilai positif. Karena hal ini berkaitan dengan $R_0 < 1$, maka akan dilakukan pembuktian bahwa λ_4 dan λ_5 keduanya bernilai negatif. Berdasarkan sifat persamaan kuadrat, maka persamaan (4.15) didapat

$$\lambda_4 + \lambda_5 = -(\theta + \alpha + \sigma + \gamma + 2\mu)$$

Karena $\theta + \alpha + \sigma + \gamma + 2\mu$ pasti bernilai negatif, maka $(\theta + \alpha + \sigma + \gamma + 2\mu) < 0$ sehingga $\lambda_4 + \lambda_5 < 0$, dimana bisa dipastikan λ_4 dan λ_5 sama-sama bernilai negatif. Dengan demikian terbukti bahwa λ_4 dan λ_5 bernilai negatif jika dan hanya jika $R_0 < 1$.

Sehingga dapat disimpulkan bahwa

- Semua nilai eigen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5$ bernilai negatif jika $R_0 < 1$. pada keadaan ini titik ekuilibrium bebas penyakit E_0 akan stabil asimtotik.
- Namun jika $(\sigma + \gamma + \mu)(\theta + \alpha + \mu) - \frac{(1-m)\beta\mu N\sigma}{m\rho + \mu} - \frac{\omega m\rho\mu N\sigma}{(m\rho + \mu)(\delta + \mu)} < 0$ atau $R_0 > 1$ maka akan terdapat nilai eigen λ_4 atau λ_5 yang bernilai positif, dan pada keadaan ini titik ekuilibrium bebas penyakit E_0 tidak stabil akibatnya akan muncul titik ekuilibrium lain.

4.2.4. Titik Ekuilibrium Endemik

Titik ekuilibrium endemik adalah keadaan yang mendeskripsikan dimana penyakit selalu ada didalam populasi yang arti akan selalu ada individu yang terinfeksi penyakit sehingga didapatkan I pada titik ekuilibrium endemik penyakit $I^* > 0$.

Dari persamaan (4.5) diperoleh

$$\begin{aligned}\sigma E - (\mu + \theta + \alpha)I &= 0 \\ \sigma E &= (\mu + \theta + \alpha)I \\ E^* &= \frac{(\mu + \theta + \alpha)I}{\sigma}\end{aligned}\tag{4.21}$$

Substitusi persamaan (4.21) ke persamaan (4.2) diperoleh

$$\begin{aligned}\mu N + \gamma E - (1 - m)\beta IS - m\rho S - \mu S &= 0 \\ \mu N + \gamma E - ((1 - m)\beta I + m\rho + \mu)S &= 0 \\ -((1 - m)\beta I + m\rho + \mu)S &= -(\mu N + \gamma E)\end{aligned}$$

$$S = \frac{\frac{\mu\sigma N + \gamma(\mu + \theta + \alpha)I}{\sigma}}{((1-m)\beta I + m\rho + \mu)}$$

$$S^* = \frac{\mu\sigma N + \gamma(\mu + \theta + \alpha)I}{\sigma((1-m)\beta I + m\rho + \mu)} \quad (4.22)$$

Substitusikan persamaan (4.22) ke persamaan (4.3) diperoleh

$$m\rho S - (\mu + \delta + \omega I)V = 0$$

$$-(\mu + \delta + \omega I)V = -m\rho S$$

$$V = \frac{m\rho S}{\mu + \delta + \omega I}$$

$$V = \frac{m\rho \left(\frac{\mu\sigma N + \gamma(\mu + \theta + \alpha)I}{\sigma((1-m)\beta I + m\rho + \mu)} \right)}{\mu + \delta + \omega I}$$

$$V^* = \frac{m\rho(\mu\sigma N + \gamma(\mu + \theta + \alpha)I)}{\sigma(\mu + \delta + \omega I)((1-m)\beta I + m\rho + \mu)} \quad (4.23)$$

Substitusikan persamaan (4.23) ke persamaan (4.6) diperoleh

$$\theta I + \delta V - \mu R = 0$$

$$\theta I + \delta \left(\frac{m\rho(\mu\sigma N + \gamma(\mu + \theta + \alpha)I)}{\sigma(\mu + \delta + \omega I)((1-m)\beta I + m\rho + \mu)} \right) - \mu R = 0$$

$$R = \frac{\left[\theta I + \delta \left(\frac{m\rho(\mu\sigma N + \gamma(\mu + \theta + \alpha)I)}{\sigma(\mu + \delta + \omega I)((1-m)\beta I + m\rho + \mu)} \right) \right]}{\mu}$$

$$R^* = \frac{\theta I \sigma(\mu + \delta + \omega I)((1-m)\beta I + m\rho + \mu) + \delta m\rho(\mu\sigma N + \gamma(\mu + \theta + \alpha)I)}{\mu\sigma(\mu + \delta + \omega I)((1-m)\beta I + m\rho + \mu)} \quad (4.24)$$

Substitusikan persamaan (4.21), (4.22), dan (4.23) ke persamaan (4.4) diperoleh

$$(1-m)\beta SI + \omega VI - \sigma E - \gamma E - \mu E = 0$$

$$(1-m)\beta SI + \omega VI - (\sigma + \gamma + \mu)E = 0$$

$$(1-m)\beta \left(\frac{\mu\sigma N + \gamma(\mu + \theta + \alpha)I}{\sigma((1-m)\beta I + m\rho + \mu)} \right) I + \omega \left(\frac{m\rho(\mu\sigma N + \gamma(\mu + \theta + \alpha)I)}{\sigma(\mu + \delta + \omega I)((1-m)\beta I + m\rho + \mu)} \right) I = (\sigma + \gamma + \mu) \frac{(\mu + \theta + \alpha)I}{\sigma}$$

$$I \left[(1-m)\beta \left(\frac{\mu\sigma N + \gamma(\mu + \theta + \alpha)I}{\sigma((1-m)\beta I + m\rho + \mu)} \right) + \omega \left(\frac{m\rho(\mu\sigma N + \gamma(\mu + \theta + \alpha)I)}{\sigma(\mu + \delta + \omega I)((1-m)\beta I + m\rho + \mu)} \right) \right]$$

$$= \frac{(\sigma + \gamma + \mu)(\mu + \theta + \alpha)I}{\sigma}$$

$$\begin{aligned}
& (1-m)\beta \left(\frac{\mu\sigma N + \gamma(\mu + \theta + \alpha)I}{\sigma((1-m)\beta I + m\rho + \mu)} \right) + \omega \left(\frac{m\rho(\mu\sigma N + \gamma(\mu + \theta + \alpha)I)}{\sigma(\mu + \delta + \omega I)((1-m)\beta I + m\rho + \mu)} \right) \\
& \quad = \frac{(\sigma + \gamma + \mu)(\mu + \theta + \alpha)}{\sigma} \\
& \frac{(1-m)\beta(\mu\sigma N + \gamma(\mu + \theta + \alpha)I)(\mu + \delta + \omega I) + \omega m\rho(\mu\sigma N + \gamma(\mu + \theta + \alpha)I)}{\sigma(\mu + \delta + \omega I)((1-m)\beta I + m\rho + \mu)} = \frac{(\sigma + \gamma + \mu)(\mu + \theta + \alpha)}{\sigma} \\
& \frac{(1-m)\beta(\mu\sigma N + \gamma(\mu + \theta + \alpha)I)(\mu + \delta + \omega I) + \omega m\rho(\mu\sigma N + \gamma(\mu + \theta + \alpha)I)}{(\mu + \delta + \omega I)((1-m)\beta I + m\rho + \mu)} = (\sigma + \gamma + \mu)(\mu + \theta + \alpha) \\
& (1-m)\beta(\mu\sigma N + \gamma(\mu + \theta + \alpha)I)(\mu + \delta + \omega I) + \omega m\rho(\mu\sigma N + \gamma(\mu + \theta + \alpha)I) = \\
& (\mu + \delta + \omega I)((1-m)\beta I + m\rho + \mu)(\sigma + \gamma + \mu)(\mu + \theta + \alpha) \\
& \left[((\sigma + \gamma + \mu)(\mu + \theta + \alpha)(\omega)((1-m)\beta)) - ((\omega)((1-m)\beta)(\gamma(\mu + \theta + \alpha))) \right] I^2 + \left[((\sigma + \gamma + \mu)(\mu + \theta + \alpha)(\mu + \delta)((1-m)\beta)) + ((\sigma + \gamma + \mu)(\mu + \theta + \alpha)(m\rho + \mu)(\omega)) - \right. \\
& \left. ((1-m)\beta\mu\sigma N)(\omega) - ((1-m)\beta)(\mu + \delta)(\gamma(\mu + \theta + \alpha)) - ((1-m)\beta)(\mu + \delta)(\gamma(\mu + \theta + \alpha)) \right] - \quad (4.25) \\
& \left[((\omega m\rho)(\gamma(\mu + \theta + \alpha))) \right] I + \left[((\mu + \delta)(m\rho + \mu)(\sigma + \gamma + \mu)(\mu + \theta + \alpha)) - ((1-m)\beta\mu\sigma N(\mu + \delta) + \omega m\rho\mu\sigma N) \right] = 0
\end{aligned}$$

Dari bentuk persamaan polynomial (4.25) berderajat dua di atas maka dapat diperoleh persamaan seperti berikut:

$$\begin{aligned}
a &= ((\sigma + \gamma + \mu)(\mu + \theta + \alpha)(\omega)((1-m)\beta)) - ((\omega)((1-m)\beta)(\gamma(\mu + \theta + \alpha))) \\
b &= ((\sigma + \gamma + \mu)(\mu + \theta + \alpha)(\mu + \delta)((1-m)\beta)) + ((\sigma + \gamma + \mu)(\mu + \theta + \alpha)(m\rho + \mu)(\omega)) - ((1-m)\beta\mu\sigma N)(\omega) - ((1-m)\beta)(\mu + \delta)(\gamma(\mu + \theta + \alpha)) - ((\omega m\rho)(\gamma(\mu + \theta + \alpha))) \quad (4.26) \\
c &= ((\mu + \delta)(m\rho + \mu)(\sigma + \gamma + \mu)(\mu + \theta + \alpha)) - ((1-m)\beta\mu\sigma N(\mu + \delta) + \omega m\rho\mu\sigma N)
\end{aligned}$$

Berdasarkan persamaan (4.26) didapatkan I dengan:

$$I_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Teorema 4.2.4 diasumsi $E_1 = (S^*, V^*, E^*, I^*, R^*)$ adalah titik ekuilibrium endemik dari sistem persamaan (4.1). Jika $R_0 > 1$, maka titik ekuilibrium E_1 ada, dengan

$$S^* = \frac{\mu\sigma N + \gamma(\mu + \theta + \alpha)I}{\sigma((1-m)\beta I + m\rho + \mu)}$$

$$V^* = \frac{m\rho(\mu\sigma N + \gamma(\mu + \theta + \alpha)I)}{\sigma(\mu + \delta + \omega I)((1 - m)\beta I + m\rho + \mu)}$$

$$E^* = \frac{(\mu + \theta + \alpha)I}{\sigma}$$

$$I^* = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$R^* = \frac{\theta I \sigma (\mu + \delta + \omega I) ((1 - m)\beta I + m\rho + \mu) + \delta m\rho (\mu\sigma N + \gamma(\mu + \theta + \alpha)I)}{\mu\sigma (\mu + \delta + \omega I) ((1 - m)\beta I + m\rho + \mu)}$$

dengan

$$a = ((\sigma + \gamma + \mu)(\mu + \theta + \alpha)(\omega)((1 - m)\beta)) - ((\omega)((1 - m)\beta)(\gamma(\mu + \theta + \alpha)))$$

$$b = ((\sigma + \gamma + \mu)(\mu + \theta + \alpha)(\mu + \delta)((1 - m)\beta)) + ((\sigma + \gamma + \mu)(\mu + \theta + \alpha)(m\rho + \mu)(\omega)) - (((1 - m)\beta\mu\sigma N)(\omega)) - (((1 - m)\beta)(\mu + \delta)(\gamma(\mu + \theta + \alpha))) - ((\omega m\rho)(\gamma(\mu + \theta + \alpha)))$$

$$c = ((\mu + \delta)(m\rho + \mu)(\sigma + \gamma + \mu)(\mu + \theta + \alpha)) - ((1 - m)\beta\mu\sigma N(\mu + \delta) + \omega m\rho\mu\sigma N)$$

Bukti. Titik ekuilibrium endemik artinya di dalam populasi selalu terdapat individu yang terinfeksi penyakit, sehingga I pada titik ekuilibrium endemik penyakit $I^* > 0$.

Titik ekuilibrium endemik ada jika dan hanya jika $R_0 > 1$

$$R_0 > 1$$

$$\frac{(1 - m)\beta\mu N\sigma(\delta + \mu) + \omega m\rho\mu N\sigma}{(m\rho + \mu)(\delta + \mu)(\sigma + \gamma + \mu)(\mu + \theta + \alpha)} > 1$$

$$(1 - m)\beta\mu N\sigma(\delta + \mu) + \omega m\rho\mu N\sigma > (m\rho + \mu)(\delta + \mu)(\sigma + \gamma + \mu)(\mu + \theta + \alpha)$$

$$(m\rho + \mu)(\delta + \mu)(\sigma + \gamma + \mu)(\mu + \theta + \alpha) - (1 - m)\beta\mu N\sigma(\delta + \mu) - \omega m\rho\mu N\sigma < 1 \quad (4.27)$$

Diketahui $R_0 > 1$ jika dan hanya jika nilai $c < 0$

Jika $R_0 > 1$ maka $c < 0$ dengan $a > 0$. Berdasarkan persamaan (4.26) jelas terlihat bahwa $a > 0$ dan pada persamaan (4.27) jelas $c < 0$, maka I positif ketika

$$i^* = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (4.28)$$

dengan

$$\begin{aligned}
 a &= ((\sigma + \gamma + \mu)(\mu + \theta + \alpha)(\omega)((1 - m)\beta)) - ((\omega)((1 - m)\beta)(\gamma(\mu + \theta + \alpha))) \\
 b &= ((\sigma + \gamma + \mu)(\mu + \theta + \alpha)(\mu + \delta)((1 - m)\beta)) + ((\sigma + \gamma + \mu)(\mu + \theta + \alpha)(m\rho + \mu)(\omega)) - \\
 &\quad ((1 - m)\beta\mu\sigma N)(\omega)) - ((1 - m)\beta)(\mu + \delta)(\gamma(\mu + \theta + \alpha))) - ((\omega m\rho)(\gamma(\mu + \theta + \alpha))) \\
 c &= ((\mu + \delta)(m\rho + \mu)(\sigma + \gamma + \mu)(\mu + \theta + \alpha)) - ((1 - m)\beta\mu\sigma N(\mu + \delta) + \omega m\rho\mu\sigma N)
 \end{aligned}$$

Berdasarkan persamaan (4.21), (4.22), (4.23), (4.24) dan (4.28), berturut-turut sehingga diperoleh titik ekuilibrium endemik untuk sistem (4.1) yaitu $E_1 = (S^*, V^*, E^*, I^*, R^*)$, jika $R_0 > 1$ maka titik ekuilibrium E_1 ada

$$\begin{aligned}
 S^* &= \frac{\mu\sigma N + \gamma(\mu + \theta + \alpha)I}{\sigma((1 - m)\beta I + m\rho + \mu)} \\
 V^* &= \frac{m\rho(\mu\sigma N + \gamma(\mu + \theta + \alpha)I)}{\sigma(\mu + \delta + \omega I)((1 - m)\beta I + m\rho + \mu)} \\
 E^* &= \frac{(\mu + \theta + \alpha)I}{\sigma} \\
 I^* &= \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\
 R^* &= \frac{\theta I\sigma(\mu + \delta + \omega I)((1 - m)\beta I + m\rho + \mu) + \delta m\rho(\mu\sigma N + \gamma(\mu + \theta + \alpha)I)}{\mu\sigma(\mu + \delta + \omega I)((1 - m)\beta I + m\rho + \mu)}
 \end{aligned} \tag{4.29}$$

dengan

$$\begin{aligned}
 a &= ((\sigma + \gamma + \mu)(\mu + \theta + \alpha)(\omega)((1 - m)\beta)) - ((\omega)((1 - m)\beta)(\gamma(\mu + \theta + \alpha))) \\
 b &= ((\sigma + \gamma + \mu)(\mu + \theta + \alpha)(\mu + \delta)((1 - m)\beta)) + ((\sigma + \gamma + \mu)(\mu + \theta + \alpha)(m\rho + \mu)(\omega)) - \\
 &\quad ((1 - m)\beta\mu\sigma N)(\omega)) - ((1 - m)\beta)(\mu + \delta)(\gamma(\mu + \theta + \alpha))) - ((\omega m\rho)(\gamma(\mu + \theta + \alpha))) \\
 c &= ((\mu + \delta)(m\rho + \mu)(\sigma + \gamma + \mu)(\mu + \theta + \alpha)) - ((1 - m)\beta\mu\sigma N(\mu + \delta) + \omega m\rho\mu\sigma N)
 \end{aligned}$$

Sehingga terbukti **Teorema 4.2.4** benar. ■

4.2.5. Kestabilan Titik Ekuilibrium Endemik

Untuk menganalisis kestabilan pada titik ekuilibrium endemik dapat dilakukan dengan cara melinearkan pada sekitar titik ekuilibrium endemik sehingga dapat diperoleh matriks jacobian endemik (J_1) dari titik ekuilibrium endemik dari sistem (4.4) sebagai berikut:

$$J_1 = \begin{bmatrix} -(1-m)\beta I - m\rho - \mu & 0 & \gamma & -(1-m)\beta S & 0 \\ m\rho & -(\omega I + \delta + \mu) & 0 & \omega V & 0 \\ (1-m)\beta I & \omega I & -(\sigma + \gamma + \mu) & (1-m)\beta S + \omega V & 0 \\ 0 & 0 & \sigma & -\theta - \alpha - \mu & 0 \\ 0 & \delta & 0 & \sigma & -\mu \end{bmatrix} \quad (4.30)$$

Titik ekulibrium endemik (E_1) disubstitusikan ke persamaan (4.28), sehingga diperoleh matriks jacobian di sekitar titik ekuilibrium endemik seperti berikut:

$$\begin{bmatrix} \frac{-(1-m)\beta(\mu\sigma N + \gamma(\mu + \theta + \alpha)I)}{\sigma((1-m)\beta I + m\rho + \mu)} - m\rho - \mu & 0 & \gamma & \frac{-(1-m)\beta(\mu\sigma N + \gamma(\mu + \theta + \alpha)I)}{\sigma((1-m)\beta I + m\rho + \mu)} & 0 \\ m\rho & -\omega\left(\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right) - (\delta + \mu) & 0 & \frac{\omega m\rho(\mu\sigma N + \gamma(\mu + \theta + \alpha)I)}{\sigma(\mu + \delta + \omega I)((1-m)\beta I + m\rho + \mu)} & 0 \\ (1-m)\beta\left(\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right) & \omega\left(\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right) & -(\sigma + \gamma + \mu) & \frac{(1-m)\beta(\mu\sigma N + \gamma(\mu + \theta + \alpha)I)}{\sigma((1-m)\beta I + m\rho + \mu)} + \frac{\omega m\rho(\mu\sigma N + \gamma(\mu + \theta + \alpha)I)}{\sigma(\mu + \delta + \omega I)((1-m)\beta I + m\rho + \mu)} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma & -\theta - \alpha - \mu & 0 \\ 0 & \delta & 0 & \sigma & -\mu \end{bmatrix}$$

Nilai eigen dari matrik (J_1) dapat diperoleh dengan menemukan akar-akar dari persamaan karakteristik yang diperoleh dari persamaan berikut

$$\det(\lambda I - J_1) = 0$$

$$\begin{vmatrix} \lambda - \left(\frac{-(1-m)\beta(\mu\sigma N + \gamma(\mu + \theta + \alpha)I)}{\sigma((1-m)\beta I + m\rho + \mu)} - m\rho - \mu \right) & 0 & \gamma & \frac{-(1-m)\beta(\mu\sigma N + \gamma(\mu + \theta + \alpha)I)}{\sigma((1-m)\beta I + m\rho + \mu)} & 0 \\ m\rho & \lambda + \omega\left(\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right) - (\delta + \mu) & 0 & \frac{\omega m\rho(\mu\sigma N + \gamma(\mu + \theta + \alpha)I)}{\sigma(\mu + \delta + \omega I)((1-m)\beta I + m\rho + \mu)} & 0 \\ (1-m)\beta\left(\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right) & \omega\left(\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right) & \lambda + \sigma + \gamma + \mu & \frac{(1-m)\beta(\mu\sigma N + \gamma(\mu + \theta + \alpha)I)}{\sigma((1-m)\beta I + m\rho + \mu)} + \frac{\omega m\rho(\mu\sigma N + \gamma(\mu + \theta + \alpha)I)}{\sigma(\mu + \delta + \omega I)((1-m)\beta I + m\rho + \mu)} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma & -\theta - \alpha - \mu & 0 \\ 0 & \delta & 0 & \sigma & \lambda + \mu \end{vmatrix} = 0$$

Solusi dari persamaan di atas untuk mendapatkan nilai $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5$ secara analitik sulit diperoleh maka dilakukan analisis kestabilan titik ekuilibrium endemik secara numerik.

4.3. Simulasi Numerik Model SVEIR

Untuk menganalisis kestabilan pada titik ekuilibrium endemik maka akan dilakukan secara numerik dengan bantuan aplikasi Matlab. Sebelum melakukan analisis diperlukan nilai-nilai parameter. Nilai-nilai parameter tersebut terdapat pada **Tabel 2**.

Diasumsikan total populasi adalah 1000 individu

$$N = 1000 \text{ individu}$$

Berikutnya akan ditentukan nilai parameter μ , yaitu laju kelahiran alami. Diasumsikan laju kelahiran dan kematian alami sama yaitu sebesar

$$\mu = \frac{1}{\text{Angka Harapan Hidup}}$$

$$\mu = 0,0125/\text{hari}$$

Berikutnya proporsi individu rentan yang divaksinasi, jumlah proporsi individu rentan yang divaksinasi diperoleh dengan cara jumlah individu yang telah menerima dosis kedua vaksinasi dibagi dengan jumlah total seluruh populasi, maka proporsi individu rentan yang telah menerima dosis kedua vaksinasi sebesar

$$m = \frac{\text{Jumlah Individu yang di vaksinasi}}{\text{Jumlah total seluruh populasi}}$$

$$m = 0,78/\text{hari}$$

Selanjutnya akan ditentukan nilai parameter σ , yaitu laju perpindahan individu *exposed* menjadi individu *infected*. Masa inkubasi untuk penyakit Covid-19 adalah selama 14 hari, maka laju individu *exposed* menjadi individu *infected* sebesar

$$\sigma = \frac{1}{\text{masa inkubasi}} = \frac{1}{14} = 0.0714/\text{hari}$$

Laju perpindahan individu rentan yang telah divaksinasi (ρ), pemerintah Indonesia memperkirakan untuk memberikan vaksinasi 70% dari total populasi penduduk Indonesia akan membutuhkan waktu selama 15 bulan (Kemkes, 2021). Sehingga dari penjelasan di atas laju perpindahan individu rentan yang divaksinasi sebesar

$$\rho = \frac{1}{15 \text{ bulan}} = \frac{1}{455 \text{ hari}} = 0.0021978/\text{hari}$$

Laju perpindahan individu yang telah melakukan vaksinasi dan tidak berinteraksi dengan individu terinfeksi, rata-rata tubuh manusia membutuhkan waktu terbentuk 7-14 hari untuk membentuk sejumlah antibodi pelindung

(Alodokter, 2022). Maka laju perpindahan individu yang telah melakukan vaksinasi dan dan tidak berinteraksi dengan individu terinfeksi sebesar

$$\delta = \frac{1}{14 \text{ hari}} = 0.0714/\text{hari}$$

Laju perpindahan individu yang telah melakukan vaksinasi tetap dapat tertular Covid-19 karena melakukan interaksi dengan individu yang terinfeksi Covid-19 , tubuh manusia yang telah melakukan vaksinasi sampai tahap kedua mempunyai kekebalan terhadap virus corona selama 3 bulan. Maka laju perpindahannya sebesar

$$\omega = \frac{1}{3 \text{ bulan}} = \frac{1}{90 \text{ hari}} = 0.01111/\text{hari}$$

Laju perpindahan individu *exposed* menjadi individu rentan kembali karena individu tersebut hanya memiliki gejala terpapar Covid-19 akan tetapi hasil swab PCR negatif maka harus melakukan isolasi mandiri selama 5-10 hari. Maka laju perpindahannya sebesar

$$\gamma = \frac{1}{10 \text{ hari}} = 0.1/\text{hari}$$

Individu yang terinfeksi Covid-19 dapat meninggal diakibatkan penyakit dengan laju sebesar (Musa et al, 2021).

$$\alpha = 0.025/\text{hari}$$

Laju penularan Covid-19 adalah sebesar (Eti Hartati, 2021).

$$\beta = 0.1/\text{hari}$$

Laju perpindahan individu yang terinfeksi menjadi individu *recovered* dengan laju sebesar (Gumel et al, 2021).

$$\theta = 0,27/\text{hari}$$

Berikut merupakan nilai parameter yang akan ditampilkan dalam bentuk tabel seperti berikut.

Tabel 3. Nilai Parameter.

No.	Parameter	Nilai
1.	μ	0,0125/hari
2.	β	0,1/hari

3.	σ	0,0714/hari
4.	ρ	0,0021978/hari
5.	δ	0,0714/hari
6.	ω	0,01111/hari
7.	γ	0,1/hari
8.	α	0,025/hari
9.	θ	0,27/hari
10.	m	0,78/hari
11.	N	1000 individu

Berdasarkan nilai-nilai parameter di atas diperoleh, maka selanjutnya akan disubstitusikan ke dalam sistem (4.1), sehingga akan diperoleh model epidemik SVEIR pada penyebaran penyakit Covid-19 pada kasus penggunaan vaksinasi di Indonesia pada tahun 2021 dalam bentuk simulasi numerik sebagai berikut:

$$\frac{dS}{dt} = (0,0125)(1000) + (0,1)E - (1 - 0,78)(0,1)IS - (0,39326)(0,0021978)S - (0,0125)S$$

$$\frac{dV}{dt} = (0,39326)(0,0021978)S - (0,0125 + 0,0714 + (0,01111)I)V$$

$$\frac{dE}{dt} = (1 - 0,78)(0,1)SI + (0,01111)VI - (0,0714 + 0,1 + 0,0125)E$$

$$\frac{dI}{dt} = (0,0714)E - (0,0125 + 0,27 + 0,025)I$$

$$\frac{dR}{dt} = (0,27)I + (0,0714)V - (0,0125)R$$

Selanjutnya akan dilakukan simulasi numerik untuk titik ekuilibrium sebagai berikut:

1. Titik ekuilibrium Bebas penyakit

Berdasarkan nilai parameter pada **table 3** akan disubstitusikan ke persamaan (4.11). $E_0 = (S, V, E, I, R) = \left(\frac{\mu N}{m\rho + \mu}, \frac{m\rho\mu N}{(m\rho + \mu)(\delta + \mu)}, 0, 0, \frac{\delta m\rho\mu N}{\mu(m\rho + \mu)(\delta + \mu)} \right)$ sehingga:

$$\begin{aligned} S &= \frac{\mu N}{m\rho + \mu} \\ &= \frac{(0,0125)(1000)}{(0,78)(0,0021978) + 0,0125} \\ &= 879,397091 \end{aligned}$$

$$V = \frac{m\rho\mu N}{(m\rho + \mu)(\delta + \mu)}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(0,78)(0,0021978)(0,0125)(1000)}{((0,78)(0,0021978) + 0,0125)(0,0714 + 0,0125)} \\
&= 17,9682522 \\
R &= \frac{\delta m \rho \mu N}{\mu(m\rho + \mu)(\delta + \mu)} \\
&= \frac{(0,0714)(0,78)(0,0021978)(0,0125)(1000)}{(0,0125)((0,78)(0,0021978) + 0,0125)(0,0714 + 0,0125)} \\
&= 102,634657
\end{aligned}$$

Sehingga nilai titik ekuilibrium bebas penyakit adalah:

$$E_0 = (879,397091; 17,9682522; 0; 0; 102,634657)$$

Nilai *basic reproduction number* (R_0) dari model SVEIR pada penyebaran penyakit Covid-19 di indonesia sebesar:

$$R_0 = \frac{\beta \mu \sigma (\delta + \mu) + \omega \mu m \rho \sigma}{(m\rho + \mu)(\delta + \mu)(\sigma + \gamma + \mu)(\mu + \theta + \alpha)} = 24,67955522$$

$$R_0 > 1$$

Berdasarkan hasil di atas diketahui bahwa nilai dari *basic reproduction number* diperoleh sebesar $R_0 = 24,679552$ atau dibulatkan sebesar $R_0 = 25$ yang artinya setiap satu orang yang terinfeksi penyakit Covid-19 dapat menularkan kepada 25 orang lainnya. Berdasarkan teorema apabila $R_0 > 1$ maka penyakit akan menyebar atau dengan kata lain akan terjadi pandemi di dalam populasi dan sistem mempunyai dua titik ekuilibrium yaitu titik ekuilibrium bebas penyakit yang tidak stabil dan memiliki titik ekuilibrium baru yaitu titik ekuilibrium endemik.

2. Titik Ekuilibrium Endemik

Berdasarkan nilai parameter pada **table 3** akan disubstitusikan ke persamaan (4.29).

Dimana,

$$a = ((\sigma + \gamma + \mu)(\mu + \theta + \alpha)(\omega)((1 - m)\beta)) - ((\omega)((1 - m)\beta)(\gamma(\mu + \theta + \alpha)))$$

$$a = 0,00000630585269$$

$$\begin{aligned}
b &= ((\sigma + \gamma + \mu)(\mu + \theta + \alpha)(\mu + \delta)((1 - m)\beta)) + ((\sigma + \gamma + \mu)(\mu + \theta + \alpha)(m\rho + \mu)(\omega)) - \\
&\quad (((1 - m)\beta\mu\sigma N)(\omega)) - (((1 - m)\beta)(\mu + \delta)(\gamma(\mu + \theta + \alpha))) - ((\omega m\rho)(\gamma(\mu + \theta + \alpha)))
\end{aligned}$$

$$b = -0,0001621799526$$

$$c = ((\mu + \delta)(m\rho + \mu)(\sigma + \gamma + \mu)(\mu + \theta + \alpha)) - ((1 - m)\beta\mu\sigma N(\mu + \delta) + \omega m\rho\mu\sigma N)$$

$$c = -0,0002200744444$$

$$I^* = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= 27,01102293$$

$$S^* = \frac{\mu\sigma N + \gamma(\mu + \theta + \alpha)I}{\sigma((1 - m)\beta I + m\rho + \mu)}$$

$$= \frac{(0,0125)(0,0714)(1000) + (0,1)(0,0125 + 0,27 + 0,025)(27,01102293)}{0,0714((1 - 0,78)(0,1)(27,01102293) + (0,78)(0,0021978) + 0,0125)}$$

$$= 17,0634335$$

$$V^* = \frac{m\rho(\mu\sigma N + \gamma(\mu + \theta + \alpha)I)}{\sigma(\mu + \delta + \omega I)((1 - m)\beta I + m\rho + \mu)}$$

$$= \frac{(0,78)(0,0021978)((0,39326)(0,0714)(1000) + (0,1)(0,0125 + 0,27 + 0,025)(27,01102293))}{0,0714(0,0125 + 0,0714 + 0,01111(27,01102293))((1 - 0,78)(0,1)(27,01102293) + (0,78)(0,0021978) + 0,0125)}$$

$$= 0,0761774609$$

$$E^* = \frac{(\mu + \theta + \alpha)I}{\sigma}$$

$$= \frac{(0,0125 + 0,27 + 0,025)(27,01102293)}{0,0714}$$

$$= 116,328985$$

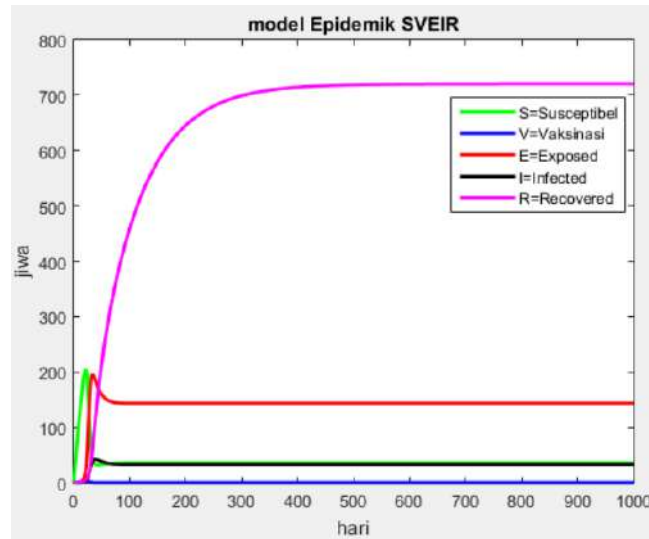
$$R^* = \frac{\theta I\sigma(\mu + \delta + \omega I)((1 - m)\beta I + m\rho + \mu) + \delta m\rho(\mu\sigma N + \gamma(\mu + \theta + \alpha)I)}{\mu\sigma(\mu + \delta + \omega I)((1 - m)\beta I + m\rho + \mu)}$$

$$= 583,87322$$

Sehingga nilai titik ekuilibrium endemik adalah:

$$E_1 = (17,0634335; 0,0761774609; 116,328985; 27,01102293; 583,87322)$$

Hasil simulasi titik ekuilibrium endemik E_1 dengan menggunakan bantuan aplikasi matlab yang berdasarkan dengan parameter pada **tabel 3** dan sembarang nilai awal yang diasumsikan, diperoleh seperti berikut:



Gambar 7. Simulasi sistem (4.1) menuju titik ekuilibrium endemik

Pada **Gambar 7** subpopulasi rentan ditunjukkan dengan garis berwarna hijau yang menunjukkan bahwa grafik tersebut mengalami kenaikan hingga hari ke-21 dan akan mengalami penurunan hingga hari ke-110 dan stabil pada titik tersebut. Kenaikan terhadap grafik ini disebabkan oleh aliran masuk yang berupa laju kelahiran alami dengan laju (μ) dan laju perpindahan individu *exposed* yang kembali menjadi individu rentan dengan laju sebesar (γ). Sedangkan penurunan terhadap grafik disebabkan oleh aliran keluar dari individu rentan dengan laju ($m\rho$) yang merupakan laju perpindahan individu rentan yang telah melakukan vaksinasi dan proporsi individu rentan yang telah melakukan vaksinasi dan perpindahan individu rentan menjadi individu *exposed* dengan laju (γ) dan laju kematian alami sebesar (μ).

Keadaan subpopulasi vaksinasi berdasarkan pada **Gambar 7** yang ditunjukkan dengan garis berwarna biru mengalami penurunan sampai hari ke-139 dan stabil pada titik tersebut. Penurunan ini disebabkan oleh aliran keluar pada populasi vaksinasi yang berupa laju perpindahan dari individu vaksinasi ke individu *exposed* dengan laju sebesar (ω) dan laju perpindahan individu vaksinasi ke individu *recovered* dengan laju sebesar (δ) dan laju kematian alami sebesar (μ).

Keadaan subpopulasi *exposed* berdasarkan pada **Gambar 7** yang ditunjukkan dengan garis berwarna merah menunjukkan bahwa grafik tersebut mengalami kenaikan hingga hari ke-34 dan mengalami penurunan secara terus menerus sampai hari ke-103 dan stabil pada titik tersebut. Kenaikan terhadap grafik ini disebabkan oleh aliran masuk individu rentan yang berinteraksi dengan individu *infected* dengan laju sebesar (β) dan laju (ω) yang merupakan individu

yang telah melakukan vaksinasi tetapi melakukan interaksi dengan individu *infected*.

Keadaan subpopulasi *infected* berdasarkan pada **Gambar 7** yang ditunjukkan dengan garis berwarna hitam menunjukkan bahwa grafik tersebut mengalami kenaikan hingga hari ke-39 dan mengalami penurunan secara terus menerus sampai hari ke-114 dan stabil pada titik tersebut. Kenaikan terhadap grafik ini disebabkan oleh aliran masuk individu *exposed* yang menjadi individu *infected* dengan laju (σ) sedangkan penurunan terhadap grafik disebabkan oleh aliran keluar individu *infected* yang telah sembuh dari penyakit dengan laju sebesar (θ) dan laju kematian alami sebesar (μ).

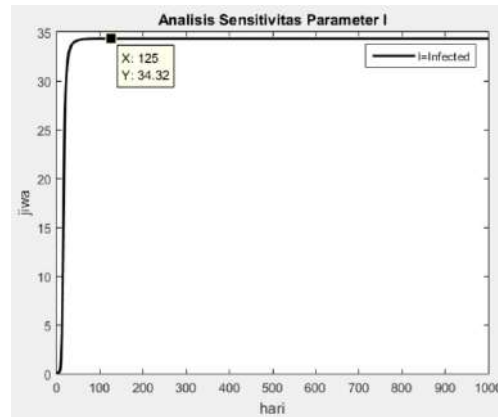
Keadaan subpopulasi *recovered* berdasarkan pada **Gambar 7** yang ditunjukkan dengan garis berwarna ungu menunjukkan bahwa grafik tersebut mengalami kenaikan yang signifikan dimulai dari hari ke-1 dan mengalami kenaikan secara terus menerus sampai pada hari ke-838 dan stabil pada titik tersebut. Kenaikan terhadap grafik ini disebabkan oleh aliran masuk individu yang telah melakukan vaksinasi dan tidak berinteraksi dengan individu yang terinfeksi penyakit dengan laju sebesar (δ) dan kenaikan grafik juga dipengaruhi dengan aliran masuk individu yang telah sembuh terhadap penyakit dengan laju perpindahan sebesar (θ).

Selanjutnya akan dilakukan simulasi numerik untuk melihat efektivitas pada penggunaan vaksinasi dalam menanggulangi penyebaran penyakit Covid-19 di Indonesia dengan mengubah nilai parameter proporsi vaksinasi (m) disajikan dalam tabel berikut:

Tabel 4. Efektivitas penggunaan vaksinasi

m	R_0	Pandemi berakhir hari ke-
0	126,2616215	125
0,5	58,19821951	118
0,78	24.67955522	114,4 atau 114
1	0,3125138713	51

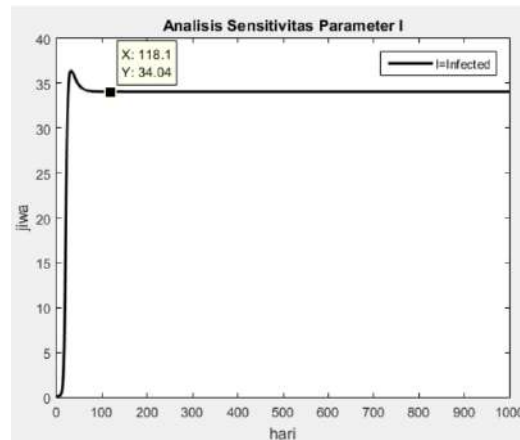
1. Simulasi dengan menggunakan nilai parameter $m = 0$ yang artinya tidak ada proporsi individu yang melakukan vaksinasi, dengan diperoleh nilai *basic reproduction number* sebesar $R_0 = 126,2616215$ yang artinya nilai *basic reproduction number* lebih besar dari satu ($R_0 > 1$), sehingga berdasarkan teorema apabila $R_0 > 1$ maka penyakit akan menyebar atau dengan kata lain akan terjadi pandemi di dalam populasi, disajikan pada gambar berikut:



Gambar 8. Simulasi titik I ketika $m = 0$.

Berdasarkan gambar di atas individu terinfeksi akan mengalami kenaikan yang signifikan hingga hari 125 dan stabil pada titik tersebut.

2. Simulasi dengan menggunakan nilai parameter $m = 0,5$ diperoleh nilai *basic reproduction number* sebesar $R_0 = 58,19821951$ yang artinya nilai *basic reproduction number* lebih besar dari satu ($R_0 > 1$), sehingga berdasarkan teorema apabila $R_0 > 1$ maka penyakit akan menyebar atau dengan kata lain akan terjadi pandemi di dalam populasi, disajikan pada gambar berikut:

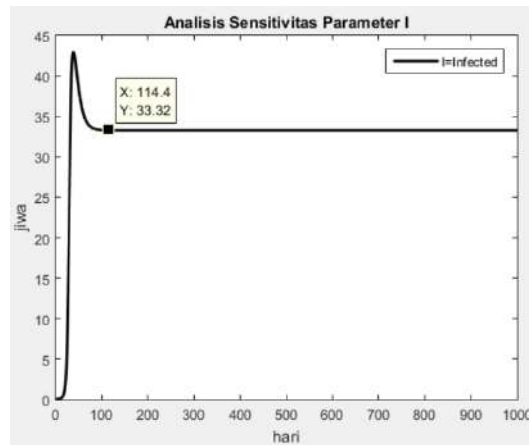


Gambar 9. Simulasi titik I ketika $m = 0,5$.

Berdasarkan gambar di atas individu terinfeksi akan mengalami kenaikan yang signifikan hingga hari ke-32 dan mengalami penurunan hingga hari ke-118 dan stabil pada titik tersebut.

3. Simulasi dengan menggunakan nilai parameter $m = 0,78$ diperoleh nilai *basic reproduction number* sebesar $R_0 = 24.67955522$ yang artinya nilai *basic reproduction number* lebih besar dari satu ($R_0 > 1$), sehingga berdasarkan teorema

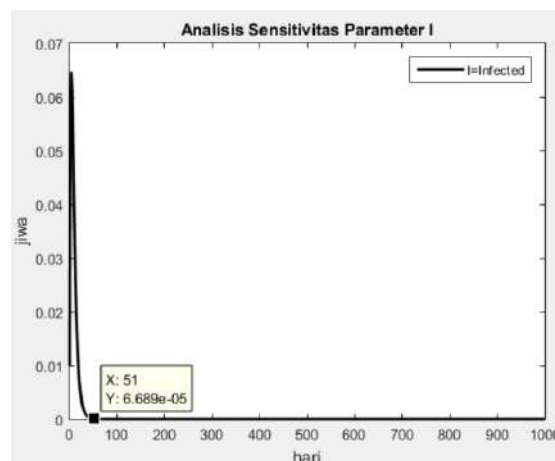
apabila $R_0 > 1$ maka penyakit akan menyebar atau dengan kata lain akan terjadi pandemi di dalam populasi, disajikan pada gambar berikut:



Gambar 10. Simulasi titik I ketika $m = 0,78$.

Berdasarkan gambar di atas individu terinfeksi akan mengalami kenaikan yang signifikan hingga hari ke-39 dan mengalami penurunan hingga hari ke-114 dan stabil pada titik tersebut.

4. Simulasi dengan menggunakan nilai parameter $m = 1$ diperoleh nilai *basic reproduction number* sebesar $R_0 = 0,3125138713$ yang artinya nilai *basic reproduction number* lebih besar dari satu ($R_0 < 1$), sehingga berdasarkan teorema apabila $R_0 < 1$ maka penyakit tidak akan menyebar atau dengan kata lain pandemi berakhir di dalam populasi, disajikan pada gambar berikut:



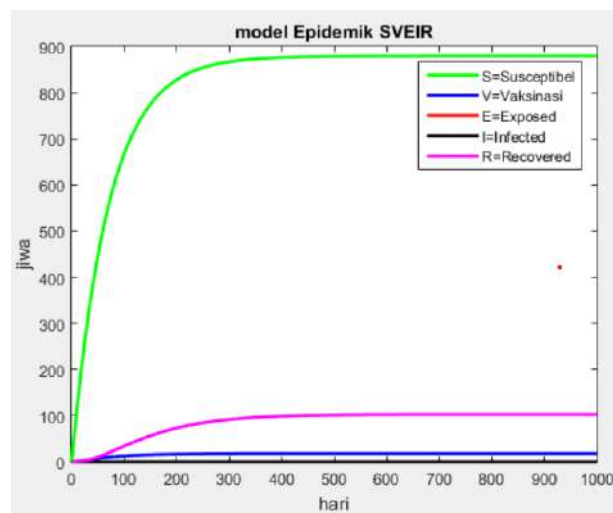
Gambar 11. Simulasi Titik I ketika $m = 1$.

Berdasarkan gambar di atas individu terinfeksi akan mengalami kenaikan yang signifikan hingga hari ke-4 dan mengalami penurunan yang signifikan secara terus menerus hingga populasi *infected* habis pada hari ke-51.

Berdasarkan hasil simulasi numerik untuk melihat efektifitas pada penggunaan vaksinasi dalam menanggulangi penyebaran penyakit Covid-19 di

Indonesia dengan mengubah nilai parameter proporsi vaksinasi (m) di atas dapat disimpulkan bahwa semakin besar nilai proporsi individu yang telah divaksinasi maka semakin sedikit individu yang terinfeksi penyakit artinya semakin cepat pandemi akan berakhir dari populasi.

Selanjutnya, untuk menggambarkan model penyebaran penyakit Covid-19 menghilang dari Indonesia adalah dengan cara menganalisis parameter yang dominan. Parameter yang dominan adalah laju perpindahan individu rentan yang menjadi individu *exposed* dengan laju sebesar (β) dan laju perpindahan individu *exposed* menjadi individu terinfeksi dengan laju sebesar (σ), sehingga jika nilai parameter (β) diperkecil menjadi ($\beta = 0,008$) dan parameter (σ) diperkecil menjadi ($\sigma = 0,005$). Maka diperoleh nilai *basic reproduction number* $R_0 = 0,2418081527$ atau $R_0 < 1$, sehingga diperoleh hasil dari simulasinya adalah sebagai berikut.



Gambar 12. Simulasi Sistem (4.1) Menuju Titik Ekuilibrium Bebas Penyakit.

Pada **Gambar 12** subpopulasi rentan ditunjukkan dengan garis berwarna hijau yang menunjukkan bahwa grafik tersebut mengalami kenaikan yang signifikan sampai dengan titik konstan dan stabil pada titik tersebut. Kenaikan ini disebabkan oleh aliran masuk pada populasi rentan yang berupa laju kelahiran alami sebesar (μ) dan laju perpindahan individu *exposed* yang kembali menjadi individu rentan dengan laju sebesar (γ).

Keadaan subpopulasi vaksinasi berdasarkan pada **Gambar 12** yang ditunjukkan dengan garis berwarna biru mengalami kenaikan secara terus menerus setiap harinya dan stabil pada hari ke-621. Kenaikan ini disebabkan oleh adanya aliran masuk pada populasi vaksinasi yang berupa perpindahan individu rentan yang telah melakukan vaksinasi sebesar (ρ) dan proporsi individu rentan yang telah melakukan vaksinasi sebesar (m).

Keadaan subpopulasi *exposed* berdasarkan pada **Gambar 12** yang ditunjukkan dengan garis berwarna merah menunjukkan penurunan mulai pada hari ke-1 secara terus menerus sampai dengan populasi *exposed* habis. Penurunan ini disebabkan oleh aliran keluar pada populasi *exposed* yang berupa laju perpindahan dari individu *exposed* menjadi individu *infected* dengan laju sebesar (σ) dan laju (γ) yang merupakan laju perpindahan individu *exposed* yang kembali menjadi individu rentan serta laju kematian alami sebesar (μ).

Keadaan subpopulasi *infected* berdasarkan pada **Gambar 12** yang ditunjukkan dengan garis berwarna hitam menunjukkan penurunan mulai hari ke-1 sampai dengan subpopulasi *infected* habis. Penurunan ini disebabkan oleh aliran keluar pada individu *infected* yang berupa laju perpindahan dari individu *infected* menjadi individu *recovered* dengan laju sebesar (θi) dan laju kematian terhadap penyakit sebesar ai dan laju kematian alami sebesar (μi).

Keadaan subpopulasi *recovered* berdasarkan pada **Gambar 12** yang ditunjukkan dengan garis berwarna ungu menunjukkan bahwa grafik tersebut mengalami kenaikan yang signifikan dimulai dari hari ke-1 dan mengalami kenaikan secara terus menerus. Kenaikan terhadap grafik ini disebabkan oleh aliran masuk individu yang telah melakukan vaksinasi dan tidak berinteraksi dengan individu yang terinfeksi penyakit dengan laju sebesar (δ) dan kenaikan grafik juga dipengaruhi dengan aliran masuk individu yang telah sembuh terhadap penyakit dengan laju perpindahan sebesar (θ).

V. KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil penelitian dapat disimpulkan bahwa sebagai berikut:

1. Bentuk model epidemik SVEIR pada penyebaran penyakit Covid-19 di Indonesia dengan penggunaan vaksinasi yaitu:

$$\frac{dS}{dt} = \mu N + \gamma E - (1 - m)\beta SI - m\rho S - \mu S$$

$$\frac{dV}{dt} = m\rho S - (\mu + \delta + \omega I)V$$

$$\frac{dE}{dt} = (1 - m)\beta SI + \omega VI - \sigma E - \gamma E - \mu E$$

$$\frac{dI}{dt} = \sigma E - (\mu + \theta + \alpha)I$$

$$\frac{dR}{dt} = \theta I + \delta V - \mu R$$

2. Memiliki dua titik ekuilibrium yaitu titik ekuilibrium bebas penyakit $E_0(S, V, E, I, R) = (879,397091; 17,9682522; 0; 0; 102,634657)$ yang berarti tidak ada individu yang terinfeksi penyakit atau penyakit tidak menular dan titik ekuilibrium endemik sebesar $E_1(S^*, V^*, E^*, I^*, R^*) = (17,0634335; 0,0761774609; 116,328985; 27,01102293; 583,87322)$ yang bersifat stabil asimtotik lokal artinya pada waktu yang akan datang dapat terjadi penyebaran penyakit Covid-19 sehingga dapat menyebabkan pandemik didalam populasi.

3. Diperoleh *basic reproduction number* dari model yaitu:

$$R_0 = \frac{(1 - m)\beta\mu N\sigma(\delta + \mu) + \omega m\rho\mu N\sigma}{(m\rho + \mu)(\delta + \mu)(\sigma + \gamma + \mu)(\mu + \theta + \alpha)}$$

Berdasarkan hasil analisis dengan menggunakan nilai parameter yang digunakan diambil dari beberapa jurnal di dapatkan bahwa nilai dari *basic reproduction number* yaitu 24,67955522 ($R_0 > 1$) yang artinya penyakit Covid-19 akan menyebar atau akan terjadi pandemi di dalam populasi. Namun jika nilai parameter β dan σ diperkecil menjadi $\beta = 0,008$ dan $\sigma = 0,005$, sehingga diperoleh nilai *basic reproduction number* yaitu 0,2418081527 ($R_0 < 1$) yang artinya penyakit tidak akan menyebar atau akan menghilang dari populasi untuk waktu yang akan datang dan penduduk akan bebas dari penyakit Covid-19

4. Berdasarkan hasil simulasi efektivitas penggunaan vaksinasi, penyakit akan semakin cepat menghilang ketika proporsi penggunaan vaksinasi diperbesar yang artinya penggunaan vaksinasi sangat efektif untuk menanggulangi penyebaran penyakit Covid-19.

5. Berdasarkan hasil analisis kestabilan titik ekuilibrium dan simulasi numerik dapat disimpulkan penyakit akan menghilang jika nilai $R_0 < 1$ dan akan menyebar di dalam populasi atau pandemik jika nilai $R_0 > 1$. Berdasarkan penjas tersebut langkah yang dapat diambil supaya penyakit tidak menjadi pandemik adalah dengan mengurangi kontak antara individu rentan dengan individu yang terinfeksi (β), meningkatkan proporsi individu yang divaksinasi (m), dan meningkatkan laju individu yang melakukan vaksinasi (ρ).

5.2 Saran

Pada penelitian ini diketahui bahwa penyebaran penyakit Covid-19 di Indonesia bersifat endemik yang artinya penyakit akan menyebar di dalam populasi dan akan terjadi pandemi, maka Langkah yang dapat diambil agar penyakit tidak menjadi endemik di dalam populasi adalah dengan cara mengurangi tingkat individu rentan yang berinteraksi dengan individu terinfeksi dan meningkatkan jumlah individu yang telah melakukan vaksinasi.

DAFTAR PUSTAKA

- A.B. Gumel, E. A. et all. 2020. "A primer on using mathematics to understand COVID-19 dynamic: Modeling, analysis and simulations,' *infect. Dis. Model.* Vol.6.
- Ambarwati, R. D. 2014. *Analisis Model Matematika Tentang Pengaruh Terapi Gen Terhadap Dinamika Pertumbuhan Sel Efektor dan Sel Tumor dalam Pengobatan Kanker*, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Yogyakarta, Yogyakarta.
- Anton, H. dan C. Rorres. 2004. *Aljabar Linear Elementer*, Edisi 8, Jilid 1, Erlangga: Jakarta.
- Arabi.Y.M et all. 2014. "Clinical course and Outcomes of Critically Ill Patients With Middle East respiratory Syndrome Coronavirus Infection," *Ann. Intern. Med.*, vol. 160.
- Azizah, Maghvirotul. 2021. "Model Matematika Penyebaran Penyakit Coronavirus Disease 2019 (Covid-19) dengan Vaksinasi, Isolasi Mandiri, dan karantina di Rumah Sakit".
- Candrawati, L. 2014. *Model Matematika SACR Penyebaran Virus Hepatitis C pada Pengguna Narkoba Suntik*, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Yogyakarta, Yogyakarta.
- Diekmann, O dan Heesterbeek. (2000). *Mathematical Epidemiology of Infectious Diseases*. New York: John Wiley and Son.
- Driessche & Watmough. 2001. Reproduction Number and Sub-Threshold Endemic Equilibria for Compartmental Models of Disease Transmission. *Mathematical Biosciences*. 180. Hlm. 29-48.
- D. Telaumbanua. 2020. "Urgensi Pembentukan Aturan Terkait Pencegahan Covid-19 di Indonesia," *QALAMUNA J. Pendidikan, Sos. dan Agama*, Vol. 12.
- F. Isbaniah and A. D. Susanto. 2020 . "Pneumonia Corona Virus Infection Disease-19". *indon Med Assoc*, Vol. 70.
- Gunawan, Lasker p, et all. 2021. *Pengantar Sistem Dinamik*. Banten: Amal Insani.
- Himawan, A. 2016. *Pemodelan Matematika Penyebaran Penyakit Ebola dengan Model Epidemi SIR pada Populasi Manusia Tak Konstan dengan Treatment*. Universitas Negeri Semarang.
- Jannah, Miftahul. Et all. 2021. "Analisis kestabilan Model SEIR untuk Penyebaran Covid-19 dengan Parameter Vaksinasi". Vol. 15.

- Kementrian Kesehatan <https://sehatnegeriku.kemkes.go.id> [diakses pada: 02-07-2022].
- Mandel, S. et all. 2011. Mathematical models of malaria-a Review. *Malaria Jurnal*. 1- 19.
- Ndii, Meksianis Zadrak. 2018. *Pemodelan Matematika Dinamika Populasi dan Penyebaran Penyakit Teori, Aplikasi, dan Numerik*. CV Budi Utama: Yogyakarta
- Olsder, G.J. and van der Woude J. W. 2003. *Mathematical System Theory*, 2nd ed. Netherlands: Delft University of Technology.
- Palobo, Markus. 2020. *Kalkulus Diferensial*. Sleman: CV Budi Utama: Yogyakarta.
- Purnomo, Dwi. 2012. *Persamaan Diferensial*. Malang: Media Nusa Creative.
- Ross, L. 2010. *Differential Equations*. 3rd. New York. Springer.
- S. Eti Hartati. 2021. “Model Matematika Penyebaran Penyakit Covid-19 dengan Penggunaan Masker Kesehatan dan Karantina”.
- Susilo A, Rumende M.C, et all. 2020. “Coronavirus disease 2019: Review Of Current Literatures” *jurnal penyakit dalam indonesia* Vol 7.
- Tri,R.P dan Guvil. Q. 2017. Kestabilan Model Epidemi dengan laju insidensi Jenuh.Padang: *Jurnal Poli Rekayasa* Vol.13.
- World Health Organization [WHO | World Health Organization](https://www.who.int) [diakses pada : 03-11-2021].

LAMPIRAN

Lampiran 1. Program Matlab Model Epidemik Pada Penyebaran Penyakit Covid-19 dengan $R_0 > 1$

```
%Nilai Parameter
miu=0.0125;
beta=0.1;
sigma=0.0714;
rho=0.0021978;
delta=0.0714;
omega=0.01111;
gamma=0.1;
alpha=0.025;
theta=0.27;
m=0.78;
N=1000;
waktu= 1000;
%nilai awal
S(1)=0.58;
V(1)=0.66;
E(1)=0.57;
I(1)=0.01;
R(1)=0.29;
dt=0.01;
h=dt;
for i=2:waktu/dt;
    S(i)=real(S(i-1)+(miu*N+gamma*E(i-1)-miu*S(i-1)-(1-m)*beta*I(i-1)*S(i-1)-rho*m*S(i-1))*dt);
    V(i)=real(V(i-1)+(rho*m*S(i-1)-miu*V(i-1)-omega*I(i-1)*V(i-1)-delta*V(i-1))*dt);
    E(i)=real(E(i-1)+((1-m)*beta*S(i-1)*I(i-1)+omega*V(i-1)*I(i-1)-sigma*E(i-1)-gamma*E(i-1)-miu*E(i-1))*dt);
    I(i)=real(I(i-1)+(sigma*E(i-1)-miu*I(i-1)-theta*I(i-1)-alpha*I(i-1))*dt);
    R(i)=real(R(i-1)+(theta*I(i-1)+delta*V(i-1)-miu*R(i-1))*dt);
end
%menggambar plot penyebaran penyakit
figure(1)
plot (dt:dt:waktu,S,'g','linewidth',2);
hold on
plot (dt:dt:waktu,V,'b','linewidth',2);
plot (dt:dt:waktu,E,'r','linewidth',2);
plot (dt:dt:waktu,I,'k','linewidth',2);
plot (dt:dt:waktu,R,'m','linewidth',2);
legend('S=Susceptibel','V=Vaksinasi','E=Exposed','I=Infected','R=Recovered');
xlabel('hari');
ylabel('jiwa');
title('model Epidemik SVEIR');
```

Lampiran 2. Program Matlab Model Epidemik pada penyebaran Penyakit Covid-19 dengan $R_0 < 1$

```
%Nilai Parameter
miu=0.0125;
beta=0.008;
sigma=0.008;
rho=0.0021978;
delta=0.0714;
omega=0.01111;
gamma=0.1;
alpha=0.025;
theta=0.27;
m=0.78;
N=1000;
waktu= 1000;
%nilai awal
S(1)=0.58;
V(1)=0.66;
E(1)=0.57;
I(1)=0.01;
R(1)=0.29;
dt=0.01;
h=dt;
for i=2:waktu/dt;
    S(i)=real(S(i-1)+(miu*N+gamma*E(i-1)-miu*S(i-1)-(1-m)*beta*I(i-1)*S(i-1)-rho*m*S(i-1))*dt);
    V(i)=real(V(i-1)+(rho*m*S(i-1)-miu*V(i-1)-omega*I(i-1)*V(i-1)-delta*V(i-1))*dt);
    E(i)=real(E(i-1)+((1-m)*beta*S(i-1)*I(i-1)+omega*V(i-1)*I(i-1)-sigma*E(i-1)-gamma*E(i-1)-miu*E(i-1))*dt);
    I(i)=real(I(i-1)+(sigma*E(i-1)-miu*I(i-1)-theta*I(i-1)-alpha*I(i-1))*dt);
    R(i)=real(R(i-1)+(theta*I(i-1)+delta*V(i-1)-miu*R(i-1))*dt);
end
%menggambar plot penyebaran penyakit
figure(1)
plot (dt:dt:waktu,S,'g','linewidth',2);
hold on
plot (dt:dt:waktu,V,'b','linewidth',2);
plot (dt:dt:waktu,E,'r','linewidth',2);
plot (dt:dt:waktu,I,'k','linewidth',2);
plot (dt:dt:waktu,R,'m','linewidth',2);
legend('S=Susceptibel','V=Vaksinasi','E=Exposed','I=Infected','R=Recovered');
xlabel('hari');
ylabel('jiwa');
title('model Epidemik SVEIR');
```

Lampiran 3. Skrip Analisis Efektivitas Penggunaan Vaksin Terhadap Penyebaran Covid-19 ketika $m = 0$.

```

close all
clc
%Nilai Parameter
miu=0.0125;
beta=0.1;
sigma=0.0714;
rho=0.0021978;
delta=0.0714;
omega=0.01111;
gamma=0.1;
alpha=0.025;
theta=0.27;
m=0;
N=1000;

waktu= 1000;
%nilai awal
S(1)=0.58;
V(1)=0.66;
E(1)=0.57;
I(1)=0.01;
R(1)=0.29;
dt=0.01;
h=dt;

for i=2:waktu/dt;
    S(i)=real(S(i-1)+(miu*N+gamma*E(i-1)-miu*S(i-1)-(1-m)*beta*I(i-1)*S(i-1)-rho*m*S(i-1))*dt);
    V(i)=real(V(i-1)+(rho*m*S(i-1)-miu*V(i-1)-omega*I(i-1)*V(i-1)-delta*V(i-1))*dt);
    E(i)=real(E(i-1)+((1-m)*beta*S(i-1)*I(i-1)+omega*V(i-1)*I(i-1)-sigma*E(i-1)-gamma*E(i-1)-miu*E(i-1))*dt);
    I(i)=real(I(i-1)+(sigma*E(i-1)-miu*I(i-1)-theta*I(i-1)-alpha*I(i-1))*dt);
    R(i)=real(R(i-1)+(theta*I(i-1)+delta*V(i-1)-miu*R(i-1))*dt);
end
%menggambar plot penyebaran penyakit
figure(1)
plot (dt:dt:waktu,I,'k','linewidth',2);
hold on
legend('I=Infected');
xlabel('hari');
ylabel('jiwa');
title('Analisis Sensitivitas Parameter I');

```

Lampiran 4. Skrip Analisis Efektivitas Penggunaan Vaksin Terhadap Penyebaran Covid-19 Ketika $m = 0,5$.

```

close all
clc
%Nilai Parameter
miu=0.0125;
beta=0.1;
sigma=0.0714;
rho=0.0021978;
delta=0.0714;
omega=0.01111;
gamma=0.1;
alpha=0.025;
theta=0.27;
m=0.5;
N=1000;

waktu= 1000;
%nilai awal
S(1)=0.58;
V(1)=0.66;
E(1)=0.57;
I(1)=0.01;
R(1)=0.29;
dt=0.01;
h=dt;

for i=2:waktu/dt;
    S(i)=real(S(i-1)+(miu*N+gamma*E(i-1)-miu*S(i-1)-(1-m)*beta*I(i-1)*S(i-1)-rho*m*S(i-1))*dt);
    V(i)=real(V(i-1)+(rho*m*S(i-1)-miu*V(i-1)-omega*I(i-1)*V(i-1)-delta*V(i-1))*dt);
    E(i)=real(E(i-1)+((1-m)*beta*S(i-1)*I(i-1)+omega*V(i-1)*I(i-1)-sigma*E(i-1)-gamma*E(i-1)-miu*E(i-1))*dt);
    I(i)=real(I(i-1)+(sigma*E(i-1)-miu*I(i-1)-theta*I(i-1)-alpha*I(i-1))*dt);
    R(i)=real(R(i-1)+(theta*I(i-1)+delta*V(i-1)-miu*R(i-1))*dt);
end
%menggambar plot penyebaran penyakit
figure(1)
plot (dt:dt:waktu,I,'k','linewidth',2);
hold on
legend('I=Infected');
xlabel('hari');
ylabel('jiwa');
title('Analisis Sensitivitas Parameter I');

```

Lampiran 5. Skrip Analisis Efektivitas Penggunaan Vaksin Terhadap Penyebaran Covid-19 Ketika $m = 0,78$.

```

close all
clc
%Nilai Parameter
miu=0.0125;
beta=0.1;
sigma=0.0714;
rho=0.0021978;
delta=0.0714;
omega=0.01111;
gamma=0.1;
alpha=0.025;
theta=0.27;
m=0.78;
N=1000;

waktu= 1000;
%nilai awal
S(1)=0.58;
V(1)=0.66;
E(1)=0.57;
I(1)=0.01;
R(1)=0.29;
dt=0.01;
h=dt;

for i=2:waktu/dt;
    S(i)=real(S(i-1)+(miu*N+gamma*E(i-1)-miu*S(i-1)-(1-m)*beta*I(i-1)*S(i-1)-rho*m*S(i-1))*dt);
    V(i)=real(V(i-1)+(rho*m*S(i-1)-miu*V(i-1)-omega*I(i-1)*V(i-1)-delta*V(i-1))*dt);
    E(i)=real(E(i-1)+((1-m)*beta*S(i-1)*I(i-1)+omega*V(i-1)*I(i-1)-sigma*E(i-1)-gamma*E(i-1)-miu*E(i-1))*dt);
    I(i)=real(I(i-1)+(sigma*E(i-1)-miu*I(i-1)-theta*I(i-1)-alpha*I(i-1))*dt);
    R(i)=real(R(i-1)+(theta*I(i-1)+delta*V(i-1)-miu*R(i-1))*dt);
end
%menggambar plot penyebaran penyakit
figure(1)
plot (dt:dt:waktu,I,'k','linewidth',2);
hold on
legend('I=Infected');
xlabel('hari');
ylabel('jiva');
title('Analisis Sensitivitas Parameter I');

```

Lampiran 6. Skrip Analisis Efektivitas Penggunaan Vaksin Terhadap Penyebaran Covid-19 Ketika $m = 1$.

```

close all
clc
%Nilai Parameter
miu=0.0125;
beta=0.1;
sigma=0.0714;
rho=0.0021978;
delta=0.0714;
omega=0.01111;
gamma=0.1;
alpha=0.025;
theta=0.27;
m=1;
N=1000;

waktu= 1000;
%nilai awal
S(1)=0.58;
V(1)=0.66;
E(1)=0.57;
I(1)=0.01;
R(1)=0.29;
dt=0.01;
h=dt;

for i=2:waktu/dt;
    S(i)=real(S(i-1)+(miu*N+gamma*E(i-1)-miu*S(i-1)-(1-m)*beta*I(i-1)*S(i-1)-rho*m*S(i-1))*dt);
    V(i)=real(V(i-1)+(rho*m*S(i-1)-miu*V(i-1)-omega*I(i-1)*V(i-1)-delta*V(i-1))*dt);
    E(i)=real(E(i-1)+((1-m)*beta*S(i-1)*I(i-1)+omega*V(i-1)*I(i-1)-sigma*E(i-1)-gamma*E(i-1)-miu*E(i-1))*dt);
    I(i)=real(I(i-1)+(sigma*E(i-1)-miu*I(i-1)-theta*I(i-1)-alpha*I(i-1))*dt);
    R(i)=real(R(i-1)+(theta*I(i-1)+delta*V(i-1)-miu*R(i-1))*dt);
end
%menggambar plot penyebaran penyakit
figure(1)
plot (dt:dt:waktu,I,'k','linewidth',2);
hold on
legend('I=Infected');
xlabel('hari');
ylabel('jiva');
title('Analisis Sensitivitas Parameter I');

```

