MATEMATIKA TERAPAN

pada Grafik Fungsi Eksponen
dan Fungsi Logaritma

MATEMATIKA TERAPAN

pada Grafik Fungsi Eksponen
dan Fungsi Logaritma

Dr. Drs. Syaiful, M.Pd.

deepublish
glorify and develop the intellectual of human's life

MATEMATIKA TERAPAN PADA GRAFIK FUNGSI EKSPONEN DAN FUNGSI LOGARITMA

Syaiful

Desain Cover :
Dwi Novidiantoko

Sumber :
www.shutterstock.com

Tata Letak :
Titis Yuliyanti

Proofreader :
Avinda Yuda Wati

Ukuran :
viii, 71 hlm, Uk: 17.5x25 cm

ISBN :
No ISBN

Cetakan Pertama :
Bulan 2020

PENERBIT DEEPUBLISH
(Grup Penerbitan CV BUDI UTAMA)
Anggota IKAPI (076/DIY/2012)

Jl.Rajawali, G. Elang 6, No 3, Drono, Sardonoharjo, Ngaglik, Sleman
Jl.Kaliurang Km.9,3 – Yogyakarta 55581
Telp/Faks: (0274) 4533427
Website: www.deepublish.co.id
www.penerbitdeepublish.com
E-mail: cs@deepublish.co.id

KATA PENGANTAR

Buku ini merupakan seri ke-2 dari *Matematika Terapan* yang kami terbitkan.

Sebagaimana biasa setiap bab selalu dimulai dengan teori yang cukup ringkas dan jelas dan ditutup dengan sejumlah contoh-contoh soal dan soal-soal latihan. Adapun materi dari setiap bab telah kami sesuaikan dengan kurikulum di Program Studi Pendidikan Fisika yang ditingkatkan yang tampak jelas dari aplikasinya yang sangat menjurus sesuai dengan pengembangan Program Studi.

Dengan adanya buku ini diharapkan agar para mahasiswa dapat terbantu dalam mentransfer, menganalisis dan memecahkan problem-problem terapan, khususnya teknik listrik dan elektronika secara matematika.

Akhir kata kami sangat mengharapkan saran-saran konstruksi dari rekan-rekan staf demi penyempurnaan isi buku ini pada masa-masa mendatang, dan ucapan terima kasih banyak kami sampaikan kepada semua pihak atas bantuan dan kerja samanya hingga terwujudnya buku ini.

Jambi, 2019

Penulis

DAFTAR ISI

BAB I

GRAFIK FUNGSI EKSPOSES DAN FUNGSI LOGARITMA

Dalam ilmu listrik dan elektronika grafik fungsi eksponen merupakan skets dasar dari grafik-grafik arus transien, pengisian dan pengosongan kapasitor, *time constant* dan sebagainya. Untuk itu ada baiknya kita mulai dari pengertian dasar tentang bilangan konstanta "e" itu sendiri.

I.1. KONSTANTA "e"

Dalam buku-buku sain dan teknik selalu kita jumpai dua macam bentuk logaritma yakni:

1. Logaritma biasa atau logaritma dengan bilangan pokok 10.
2. Logaritma Naturural atau logaritma Napier atau logaritma Hyperbolik dengan bilangan pokok "e".

Pada umumya dalam bidang teknik logaritma bentuk kedualah yang banyak dipergunakan, Hal ini tentu saja akan menimbulkan respons dari banyak kalangan orang atau mahasiswa, mengapa justru bilangan e yang dipilih sebagai bilangan pokok logaritma?

Tanggapan atau pertanyaan ini timbul karena nilai amat "rumit" dari bilangan e itu sendiri, yakni suatu nilai aproksimasi 2, 7181828……

Dapat dijelaskan di sini bahwa nilai "e" itu bukanlah dipilih tetapi terjadi secara alamiah seperti halnya dengan nilai π = 3,14159…., yang merupakan perbandingan antara keliling lingkaran dengan diameternya. Berikut ini akan di coba menguraikan tentang terjadinya nilai dari bilangan itu.

Suku Dua Newton

Suatu pernyataan (a + x) disebut dengan suku dua, dan selanjutnya marilah kita selidiki akibat apa yang terjadi dengan hasil dari suku dua itu apabila pangkatnya dinaikkan terus menerus.

$$
\begin{aligned}
(a + x)^0 &= 1\\
(a + x)^1 &= a + x\\
(a + x)^2 &= a^2 + 2ax + x^2\\
(a + x)^3 &= a^3 + 3a^2x + 3ax^2 + x^3\\
(a + x)^4 &= a^4 + 4a^3x + 6a^2x^2 + 4ax^3 + x^4\\
(a + x)^5 &= a^5 + 5a^4x + 10a^3x^2 + 10a^2x^3 + 5ax^4 + x^5
\end{aligned}
$$

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

Kesimpulan apakah yang dapat diperoleh dari hasil pemangkatan tersebut?

1. Setiap suku terdiri dari bilangan a dan x, bilangan 1 dapat dipandang sebagai $a^0 + x^0$, $a = ax^0$ dan $x = a^0x$.
2. Derajat setiap suku hasil bilangan sama dengan pangkat dari suku yang bersangkutan.
3. Pangkat dari bilangan a turun secara beraturan sedangkan pangkat dari bilangan x sebaliknya.
4. Jumlah suku hasil suatu itu lebih besar pangkat suku dua itu.
5. Koefisien dari suku hasil itu adalah:

$$
\begin{array}{lccccccccccc}
(a + x)^0 = & & & & & & 1 & & & & & \\
(a + x)^1 = & & & & & 1 & & 1 & & & & \\
(a + x)^2 = & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
(a + x)^3 = & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
(a + x)^4 = & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
(a + x)^5 = & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}
$$

Gambar dari koefisien di atas dikenal sebagai segitiga Pascal, di mana setiap koefisien pada baris berikutnya diperoleh dengan menjumlah dua buah koefisien yang berurutan pada baris sebelumnya. Metode ini dapat kita teruskan sampai pangkat ke-n. Akan tetapi tingkat efisiensi metode ini hanyalah terbatas pada suku dua yang pangkatnya relatif rendah, sedangkan untuk suku dua pangkatnya lebih tinggi misalnya $(a + x)^{35}$, metode ini tidak efisien lagi, di samping memerlukan waktu, tempat malahan amat membosankan.

Untuk menentukan koefisien ataupun hasil dari suku dua yang pangkatnya lebih tinggi dipergunakan metode koefisien suku dua dari Newton sebagai berikut:

(1) $(a + x)^n = a^n + C_n^{1}a^{n-1} + C_n^{2}a^{n-2}x^2 + C_n^{3}a^{n-3} + \ldots\ldots\ldots\ldots + x^n$

di mana : $Cn^1 = \frac{n}{1}$

$Cn^2 = \frac{n\,(n-1)}{2!}$

$Cn^3 = \frac{n\,(n-1)(n-2)}{3!}$

$Cn^k = \frac{n\,(n-1)(n-2)-------(n-k+1)}{k!}$

dan : 1 ! = 0 ! = 1

2 ! = 2.1

3 ! = 3.2.1

:

:

n ! = n ----- 4 3 2 1

Bentuk rumus (1) dapat pula ditulis singkat :

(2) $(a + x)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^{k} a^{n-k} x^{k}$

atau

(3) $(x + a)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(n-k)!k!} a^{n-k}\, x^k$

Catatan:

1. Jika n bilangan bulat positif, jumlah suku hasil terhingga = n + 1 buah suku, dan berlaku untuk semua nilai x.
2. Jika n bilangan bulat negatif, pecahan positif atau negatif, maka rumus di atas benar apabila nilai numerik x lebih kecil dari a dan jumlah suku hasil adalah tak terhingga.
3. Untuk nilai n seperti tersebut dalam sub 2 di atas dalam rumus (3) tidak dibicarakan di sini karena akan membawa kita kepada topik baru seperti $\frac{1}{2}$! misalnya (lihat matematika elektronik IV)

I.2. BENTUK STANDAR

Bentuk yang lebih sederhana dan mudah untuk diselesaikan ialah apabila dipilih a = 1, sehingga dengan demikian $1^n = 1^{n-1} = \ldots.. = 1^3 = 1^2 = 1$.

(4) $(1 + x)^n = 1 + nx + \frac{n\,(n-1)}{2!}\, x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\, x^3 + \ldots.$ atau

(5) $(1 + x)^n = \sum_{k=o}^{n} C_n^{k} x^{k}$

Hubungan (4) dan (5) ini disebut bentuk standard dari perluasan suku dua (lihat contoh soal 2 s/d 5).

I.3. NILAI KONSTANTA "e"

Jika dalam hubungan (4) di tas diambil $x = \frac{1}{n}$ maka akan diperoleh:

$$(1+\frac{1}{n})^n = 1 + n\,.\,\frac{1}{n} + \frac{n\,(n-1)}{2!}\,(\frac{1}{n})^2 + \frac{n\,(n-1)(n-2)}{3!}(\frac{1}{n})^3 + \ldots\ldots$$

$$= 1 + 1 + \frac{1-\frac{1}{n}}{2!} + \frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)}{3!} + \ldots\ldots\ldots$$

Apabila barisan ini kita lanjutkan sampai n → n maka:

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots$$

Bentuk terakhir inilah yang dikenal sebagai bilangan "e" jadi:

(6) $e = \text{limit}_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, atau

(7) $e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \ldots\ldots$

$= 2{,}718.1828{,}4590.452\ldots..$

Nilai ini disimpulkan dengan huruf "e" sebagai honorer bagi penemunya seorang ahli matematika dari Swiss yang bernama Euler.
Dengan ara yang sama dapat diturunkan rumus :

(8) $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots..$

yang disebut deret eksponensial (lihat matematika Listrik dan Elektronika IIIB)

I.4. HUBUNGAN ANTARA LOGARITMA BIASA DENGAN LOGARITMA NATURAL

Hubungan kedua bentuk logaritma tersebut dapat kita lihat sebagai berikut:
Misalkan :

$\ln N = x \quad \rightarrow \quad N = e^x$

$\text{Log } N = y \quad \rightarrow \quad N = 10^y$

$e^x = 10^y$

Ambil logaritma Natural dari kedua ruas:

$\ln e^x \quad = \quad \ln 10^y$

$x \ln e \quad = \quad y \ln 10 \qquad \text{atau} \qquad x = y \ln 10$

$\ln N \quad = \quad \log N \,.\, \ln 10$

$$(9) \qquad \text{Log } N = \frac{\ln N}{\ln 10}$$

Semua sifat-sifat dari logaritma biasa juga berlaku bagi logaritma Natural.

Oleh karena ada dua bentuk logaritma maka juga terdapat dua macam tabel. Perbedaan yang prinsipil dari kedua tabel ini hanyalah terletak pada karakteristik saja, jadi pada bagian yang bulatnya.

Dalam logaritma biasa tidak ada kesukaran untuk menduga bahwa bilangan 389 misalnya terletak antara 10^2 dan 10^3, jadi karakteristiknya adalah 2, sedangkan dalam logaritma Natural kita tidak mungkin menduga begitu saja nilai dari n tersebut di mana: 2,718.1828 …..n = 380

Tabel logaritma Natural dari 10^{+n} dan 10^{-n}

n	1	2	3	4	5
10^{+n}	2,3026	4,6052	6.9078	9.2103	11,5129
10^{-n}	3.6974	5,3948	7,0922	10,7897	12,4871

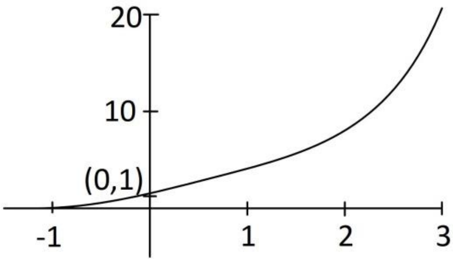
Catatan : Dengan adanya kemajuan teknologi khususnya dalam bidang elektronika, maka penggunaan kedua tabel ini mendapat tantangan, terutama pada fisika listrik dan fisika elektronika sendiri dalam praktik di *workshop* dan laboratorium. Masalah ini tentu akan menjadi pemikiran yang serius bagi kita seperti halnya dengan penggunaan *slidorule* yang sudah kita tinggalkan.

I.5. GRAFIK FUNGSI EKSPONEN DAN FUNGSI LOGARITMA

Untuk melukiskan grafik dari fungsi-fungsi elementer, cukup dengan membuat suatu tabel nilai dari variabel-variabelnya dalam interval tertentu, dan dalam praktiknya orang biasanya memilih nilai-nilai di sekitar nol untuk variabel bebasnya.

1. Grafik $y = e^x$

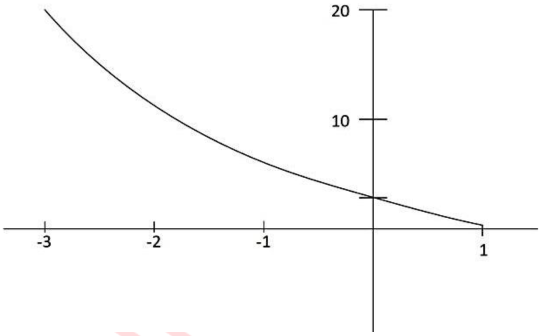
X	-1	0	0,5	1,0	1,5	2,0	3,0
y	0,4	1	1,6	2,7	4,5	7.4	20



Gambar 1.1

2. Grafik $y = e^{-x}$

X	-,31	-25	-2,5	-1,5	-1	0,5	0	1
y	20	12	7.4	4.5	2.7	1.6	1	0.4



Gambar 1.2

Jika kita perhatikan kedua bentuk grafik fungsi di atas akan terlihat beberapa persamaan dan perbedaan.

Persamaan:

- Kedua grafik itu kontinu
- Nilai kedua fungsi positif untuk semua nilai x
- Kedua grafik melalui titik (0,1)

Perbedaan:

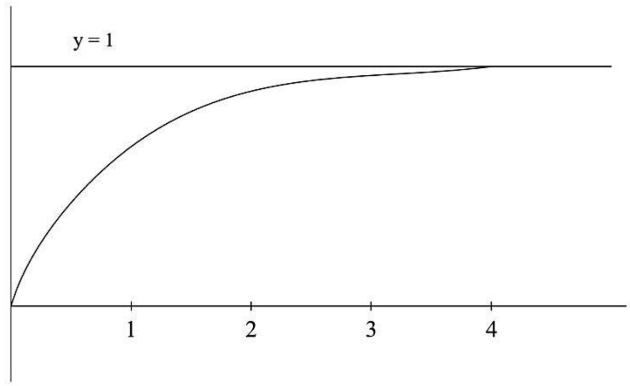
- Grafik $y = e^{x}$, monoton naik, di mana nilai fungsi terus naik dengan bertambahnya nilai x, sedangkan grafik $y = e^{-x}$ monoton turun.
- Gradien e^{x} positif dan nilainya terus bertambah dengan bertambahnya nilai x, sedangkan gradien e^{-x} negatif dan nilainya terus berkurang dengan bertambahnya x.

- Grafik yang satu merupakan bayangan cermin dari yang lain terhadap sumbu -y.

3. Grafik $y = 1 - e^{-x}$

Grafik fungsi ini merupakan sketsa dasar dari grafik pengisian dan pengosongan suatu kapasitor atau bentuk gelombang arus atau voltase dari rangkaian yang lebih komplet.

Di sini kita lihat bahwa apabila nilai x makin bertambah besar maka nilai e^{-x} semakin kecil, sehingga dengan demikian harga fungsi $y = 1 - e^{-x}$ sama dengan 1 dikurangi dengan sebuah bilangan yang sangat kecil. Dalam hal ini dikatakan bahwa harga fungsi itu mendekati. Secara teoretis nilai y = 1 akan tercapai apabila $x \rightarrow \infty$, akan tetapi dalam praktiknya untuk x = 4 misalnya, y = 0,98. Jadi dapat disimpulkan bahwa untuk x = 4 harga fungsi telah mencapai 98% nilai finalnya. Garis Y = 1 disebut asimtot dari fungsi $y = 1 - e^{-x}$.

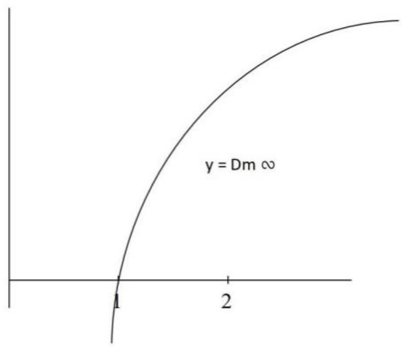


Gambar 1.3

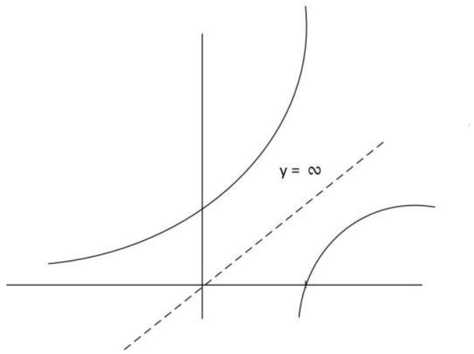
4. Grafik y = 1n x

Nilai 1n x untuk interval tertentu dapat dibaca langsung dari tabel logaritma natural.

x	0.5	1	2	3	4
y	-0.6931	0	0.6931	1.0986	1.3863



Gambar 1.4



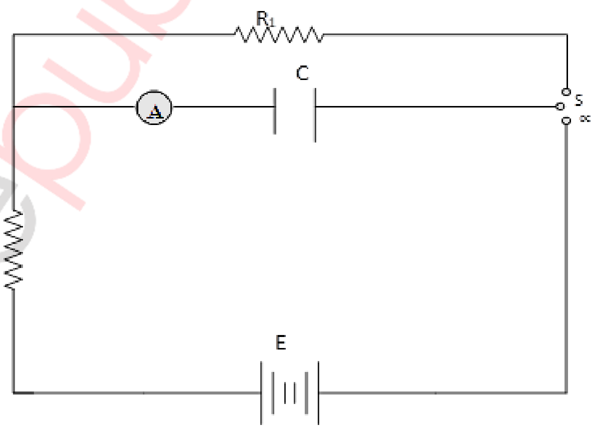
Gambar 1.5

Grafik y = lnx hanya ada untuk x > 0 saja, untuk 0 < x < 1, y adalah negatif.

Fungsi y = lnx adalah innersinya fungsi y = e^x dan ini jelas kelihatan dari gambar 1 – 5 di atas, grafik yang satu merupakan bayangan cermin dari grafik yang lain terhadap garis y = x.

I.6. PENGISIAN DAN PENGOSONGAN KAPASITOR

Pada rangkaian sederhana di bawah ini kita akan mencatat tentang perubahan nilai-nilai arus dan tegangan terhadap perubahan waktu dalam bentuk konsep dasar dari peristiwa pengisian dan pengosongan suatu kapasitor. Jika pasangan nilai (i, t) atau (v, t) kita hubungkan maka akan terjadilah lukisan grafik yang persis sama dengan grafik dalam gambar 1 – 2 dan gambar 1 – 3 di atas.



Gambar 1.6

PENGISIAN

Ketika sakelar S terbuka berarti tidak ada arus yang mengalir dan kapasitor C dianggap kosong sama sekali. Apabila sakelar S tertutup dalam posisi "e" maka semua voltase E diserap untuk tahanan R_1 dan karenanya arus permulaan q pada t = 0 adalah E/R_1. Arus ini akan menambah muatan q pada kapasitor, dengan demikian akan menimbulkan tegangan v volt yang dalam beberapa saat nanti sampai mencapai E, dan dalam waktu yang bersamaan arus dari baterai akan terus berkurang menuju nol, maka Kapasitor C telah penuh dengan muatan.

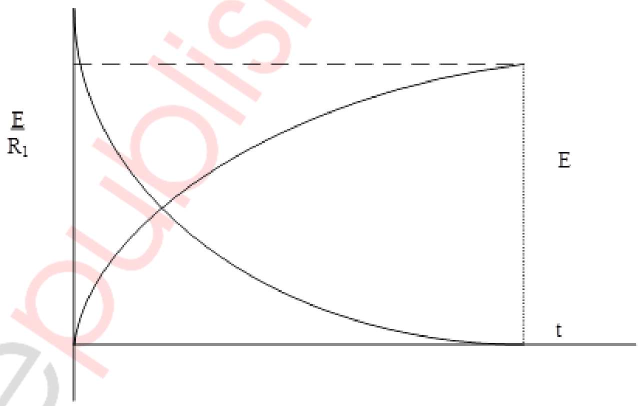
Penambahan tegangan dalam Kapasitor C dan penurunan arus dalam baterai pada setiap saatnya diberikan berturut-turut oleh:

(10) $v = E\,(1 - e^{-\frac{t}{R_1C}})$

(11) $i = \frac{E}{R_1}\, e^{-\frac{t}{R_1C}}$

Dalam rumus (10) dan (11) v dan i masing-masing disebut juga nilai tegangan dan nilau arus sesaat.

Bukti untuk kedua rumus di tas akan diberikan dalam bab terakhir dari buku ini.



Gambar 1.7

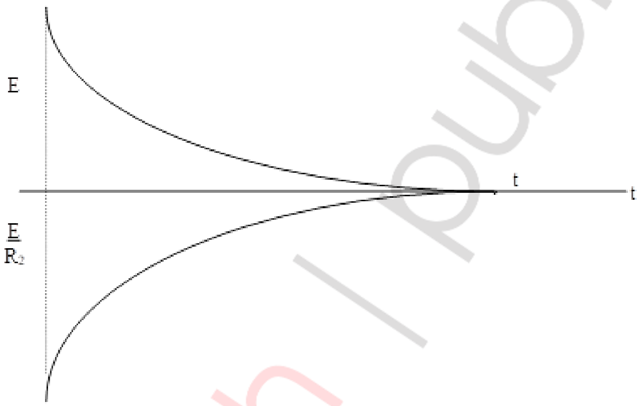
PENGOSONGAN

Sekarang sakelar S dibuka dari posisi 'a' dan ditutup pada posisi 'b'. Muatan yang penuh dari Kapasitor C tadi akan menyebabkan aliran arus melalui R_2 yang arahnya berlawanan dengan arah sebelumnya. Sementara ini dapat dilihat dengan jelas dari ammeter A. Muatan yang mengalir dari kapasitor C ini akan menimbulkan panas dalam R_2, sedangkan arus dan tegangan yang terdapat dalam C itu keduanya akan berkurang terus menerus secara kontinu menuju nol.

Tegangan dan arus sesaat pada peristiwa ini diberikan oleh:

(12) $v = Ee^{-\frac{t}{R2C}})$

(13) $i = -\frac{E}{R_2} e^{-\frac{t}{R2C}}$



Gambar 1.8

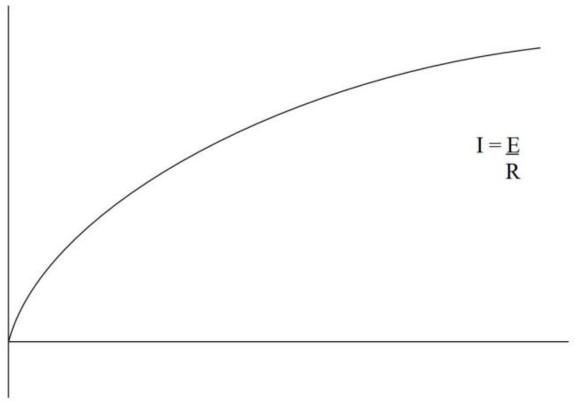
I.7. PEMBENTUKAN ARUS DALAM RANGKAIAN RL

Arah arus dalam suatu rangkaian sederhana yang mengandung suatu induktansi berlawanan dengan voltase (e.m.f) yang terjadi dalam kumparan dari induktor L. Nilai arus sesaat setelah t detik diberikan oleh:

(14) $i = \frac{E}{R}(1 - e^{=\frac{t}{L}})$

Apabila waktu t terlanjur terus maka nilai $e^{-\frac{Rt}{L}}$ itu akan semakin kecil, secara teori nilai menjadi nol untuk t yang tak terhingga dan $i = \frac{E}{R}$. Nilai arus terakhir ini disebut juga arus final atau arus dalam keadaan stabil.

(15) $I = \frac{E}{R}$



Gambar 1.9

I.8. TIME CONSTANTA T – C

Pengertian *time constant*a T – C seringkali sangat membingungkan para mahasiswa dalam analisis suatu rangkaian istilah *time constant* di sini diartikannya dengan "waktu tetap" dalam arti yang umum.

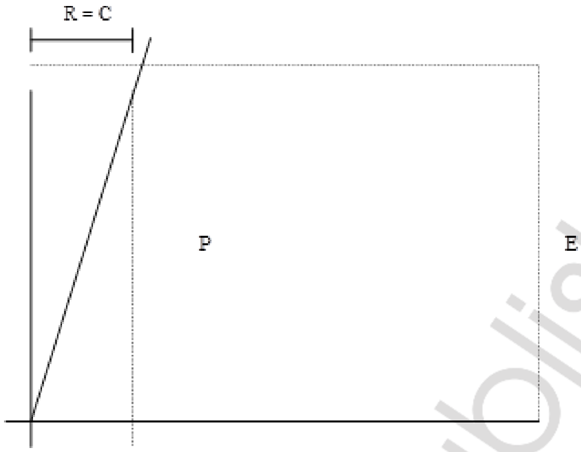
Time constant itu mempunyai arti tersendiri dan spesifikasi, sedangkan peristiwa yang berbeda. Untuk lebih jelasnya di bawah ini diberikan penjelasan dan pengertian T – C dalam rangkaian RC, RL dan Panas yang terjadi dalam suatu kumparan induktor.

1. Rangkaian Kapasitif

$$v = E\,(1 - e^{-\frac{t}{RC}})$$

Apabila waktu t bertambah nilai $e^{-\frac{t}{RC}}$ makin berkurang, dengan demikian tegangan dalam Kapasitor semakin naik. *Time constant* T'C di definisikan sebagai waktu dalam saat mana tegangan yang melalui Kapasitor itu akan mencapai nilai finalnya jika tegangan itu naik rata-rata secara kontinu semenjak permulaan rangkaian itu dioperasikan.

Secara geometri nilai T – C ini dapat diperlihatkan oleh tangen atau garis singgung pada grafik pengisian itu (gambar 1–10) di bawah.



Gambar 1.10

Time constant T – C untuk rangkaian Kapasitif sama dengan RC detik, dam dalam grafik dari tegangan yang sesungguhnya dilukiskan oleh titik P. Dengan demikian:

$$
\begin{aligned}
v \quad &= E\,(1 - e^{-\frac{RC}{RC}})\\
&= E\,(1 - e^{-1})\\
&= E\,(1 - 0{,}3679)\\
&= 0{,}6321\ E
\end{aligned}
$$

Jadi, *time constant* T – C adalah waktu yang diperlukan dalam tegangan yang melalui Kapasitor mencapai 63,2 % nilai finalnya.

Oleh karena *time constant* itu dapat dianggap sebagai skala waktu, maka dengan dasar itu pulalah grafik dari pengisian dan pengosongan suatu Kapasitor dapat dilukiskan secara tepat. Berapa T – C kah kapasitor itu akan bermuatan penuh?

Secara matematika dapat pula dijawab bahwa *time constant* T – C itu adalah waktu ketika mana pangkat dari fungsi ekspisial itu sama dengan 1.

$$v = E\,(1 - e^{-1})$$

2. Rangkaian Induktif

$$i = \frac{E}{R}\,(1 - e^{-\frac{Rt}{L}})$$

Time constant T – C untuk rangkaian induktif sama dengan $\frac{R}{L}$ detik.

$$\therefore i = \frac{E}{R}\,(1 - e^{-\frac{Rt}{L}}) = \frac{E}{R}\,(0{,}6321)$$

Jadi *time constant* untuk rangkaian induktif adalah waktu yang diperlukan arus dalam mencapai 63,2% dari nilai finalnya.

3. Panas yang Terjadi Dalam Kumparan Induktor

Temperatur sesaat dalam kumparan diberikan oleh rumus:

$$(16)\quad \theta = \theta_f\,(1 - e^{-\frac{t}{T}})$$

Di mana: θ_f = temperatur final, dan diukur dalam skala Celcius.
T = *time constant*

Temperatur yang terjadi dalam kumparan sama saja dengan peristiwa pembentukan arus dalam rangkaian induktif atau tegangan yang melalui suatu kapasitor. Dalam hal ini juga temperatur yang dicapai dalam waktu T detik adalah 63,2% dari temperatur finalnya.

Apabila panas dalam kumparan itu ingin diturunkan, maka temperatur setelah t detik diberikan oleh:

$$(17)\quad \theta = \theta_i e^{-\frac{t}{T}}$$

Di mana θ_i adalah temperatur permulaan peristiwa analog dengan penurunan tegangan pada pengosongan suatu Kapasitor.

I.9. CONTOH-CONTOH PENYELESAIAN SOAL

1. Tentukanlah suku tengah dari hasil penyelesaian suku dua $(p + \frac{1}{p})^{12}$

   Jawab: $(a + x)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} x^k$

   Oleh karena n = 12 maka jumlah suku hasil = 13 dan suku tengahnya adalah suku yang ke-7, dan $(p + \frac{1}{p})^{12} = \sum_{k=0}^{12} C_{12}^k a^{12-k} (\frac{1}{p})^k$

   $\therefore$ Suku tengahnya: $C_{12}^6 p^6 (\frac{1}{p})^6 = \frac{12 .11 .10 .9 .8 .7}{6\ 5\ 4\ 3\ 2\ 1}$
   $= 924$

2. Perluaslah $(1 + 3x)^7$ sampai suku ke-4

Jawab : $(1 + 3x)^7 = 1 + 7(3x) + \frac{7.6}{2!}(3x)^2 + \frac{7.6,5}{3!}(3x)^3 + \ldots$

$= 1 + 21x + 189x^2 + 945x^3 + \ldots.$

3. Hitunglah $\frac{1}{\sqrt{408}}$ sampai 6 desimal.

Jawab : $\frac{1}{\sqrt{408}} = (4{,}08)^{-\frac{1}{2}} = (4 + 0{,}08)^{-\frac{1}{2}}$

Ubahlah ke dalam bentuk standard:

$$(4 + 0{,}08)^{-\frac{1}{2}} = \left[4\,(1 + 0{,}02)\right]^{-\frac{1}{2}} = 4^{-\frac{1}{2}}(1 + 0{,}02)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\therefore \frac{1}{\sqrt{408}} = 4^{-\frac{1}{2}}(1 + 0{,}02)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{2}\left[1 + (-\tfrac{1}{2})90{,}02) + \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}-1)}{2!}(0.02)^2 + \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}-1)(-\frac{1}{2}-2)}{3!}(0.02)^3 + \ldots.\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[1 - 0.01 + \frac{3}{8}(0.0004) - \frac{5}{16}(0{,}000008) + \ldots\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[1 - 0.01 + 0.00015 - 0.0000025 + \ldots\right]$$

$$= \frac{1}{2}(0.9901475) = 0{,}495074$$

4. Frekuensi dari suatu rangkaian diberikan oleh:

$$f = \frac{1}{2\pi\sqrt{L.C}}$$

Jika induktansi naik 0,5% sedangkan kapasitansi tetap konstan, maka hitunglah % perubahan frekuensi tersebut.

Jawab :

$f_1 = \frac{1}{2\pi\sqrt{L_1.C}}$ dan $f_2 = \frac{1}{2\pi\sqrt{L_2.C}}$

$L_2 = L_1 + 0{,}5\%\, L_1 = L_1(1 + 0{,}005)$

$$f_2 = \frac{1}{2\pi\sqrt{L_1(1+0{,}005)C}}$$

$$= \frac{1}{2\pi\sqrt{L_1 C}\sqrt{1+0{,}005}}$$

$$= \frac{1}{2\pi\sqrt{L_1 C}}(1 - 0{,}005)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= f_1\left[1 + (-\tfrac{1}{2})(0{,}005) + \cdots\right]$$

$$= 0{,}9975\, f_1 = 99{,}75\%\, f_1$$

Jadi ternyata bahwa frekuensi itu berkurang 0,25% dari frekuensi semula.

5. Nilai arus i dalam suatu rangkaian mikrofon pada setiap saat t diberikan oleh :

$$i = {}^{v}/(r_0 + r_1 \sin wt)$$

di mana v, r_0 dan r_1 adalah konstanta positif dan $r_1 < r_0$. Perhatikan bahwa nilai arus (aproksimasi) untuk harmonik pertama adalah:

(a) $i = \frac{v}{r_0}(1 - \frac{r_1}{r_0} \sin wt)$; dan

(b) amplitudo harmonik kedua dalam rangkaian mikrofon sekarang sama dengan 50 $\frac{r_1}{r_0}$ % dari amplitudo dasar.

Jawab:

(a) $1 = \frac{v}{(r_0 + r_1 \sin wt)}$

$= \frac{v}{r_0(1 + \frac{r_1}{r_0}\sin wt)}$

$= \frac{v}{r_0}(1 - \frac{r_1}{r_0} \sin wt)^{-1}$

$= \frac{v}{r_0}(1 + (-1)\frac{r_1}{r_0} \sin wt + \ldots.)$

$= \frac{v}{r_0}(1 - \frac{r_1}{r_0} \sin wt).$

(b) Dari jawaban (a) dapat diteruskan aproksimasi kedua berikut:

$i = \frac{v}{r_0}[1 + (-1)\frac{r_1}{r_0} \sin wt + \frac{(-1)(-1-1)}{2!}(\frac{r_1}{r_0} \sin wt)^2 + \ldots\ldots\ldots.]$

$= \frac{v}{r_0}[1 + \frac{r_1}{r_0} \sin wt + \frac{r_1^2}{r_0^2} \sin^2 wt - \ldots.]$

$= \frac{v}{r_0}[1 + \frac{r_1}{r_0} \sin wt + \frac{r_1^2}{r_2^2}(\frac{1-\cos 2\,wt)}{2} - \ldots.]$

$= \frac{v}{r_0}[1 + \frac{r_1}{r_0} \sin wt + \frac{r_1^2}{2r_2^2} - \frac{r_1^2}{2r_0^2} \cos 2wt - \ldots\ldots]$

dari hubungan terakhir ini kita lihat bahwa amplitudo dasar = $\frac{vr_1}{r_0^2}$ dan amplitudo harmonik kedua $\frac{vr_1^2}{2r_0^3}$

$\therefore \frac{vr_1^2}{2r_0^3} / \frac{vr_1}{r_0^2}$ x 100% = 50 $\frac{r_1}{r_0}$ %

6. Dalam analisis dari suatu rangkaian RC setelah t detik tercatat hubungan sebagai berikut:

$$t = CR \ln (\frac{V}{V-V})$$

di mana V adalah tegangan final.

Nyatakanlah tegangan final pada saat tersebut dalam besaran-besaran yang lain.

$t \quad = CR \ln (\frac{V}{V-V})$

$\frac{t}{RC} \quad = \ln (\frac{V}{V-V})$

$e^{\frac{t}{RC}} \quad = \frac{V}{V-V}$

$(v - v)\, e^{\frac{t}{RC}} \quad = V$

$V\,(e^{\frac{t}{RC}} - 1) \; = Ve^{\frac{t}{RC}}$

$\therefore V = \frac{ve^{\frac{t}{RC}}}{e^{\frac{t}{RC}} - 1}$

7. Suatu kapasitor dari 12 μ F dihubungkan seri dengan tahanan 0,7 M Ω melalui tegangan sumber d.c dari 250 volt. Hitunglah:

(a) nilai arus permulaan

(b) nilai arus setelah 3 detik

(c) tegangan kapasitor setelah 4,2 detik.

Jawab:

(a) arus permulaan

$i = \frac{E}{R}\, e^{-\frac{t}{RC}} ; \quad t = 0$

$= \frac{E}{R} = \frac{250}{0.7 \times 10^6} = 357\ \mu A$

(b) $RC = 0.7 \times 10^6 \times 12 \times 10^{-6} = 8{,}4$

$i = \frac{E}{R}\, e^{-\frac{t}{RC}} ; \quad t = 3$

$= \frac{250}{0.7 \times 10^6}\, e^{-\frac{3}{8.4}}$

$= \frac{250}{0.7 \times 10^6}\, e^{-3571}$

$= \frac{250}{0.7 \times 10^6} . 0.7 = 250\ \mu A$

(c) $V = E\,(1 - e^{-\frac{t}{RC}})$; $t = 4{,}2$

$= 250\,(1 - e^{-\frac{4,2}{8.4}})$

$= 250\,(1 – e^{-0,5})$

$= 250\,(1 – 0{,}6065) = 98{,}4$ v

8. Suatu kapasitor bermuatan 5 μ F ingin dikosongkan melalui tahanan 0,4 MΩ. Hitunglah waktu yang diperlukan agar arus berkurang menjadi 50% ari nilai semula.

Jawab:

$$i = \frac{E}{R}\, e^{-\frac{t}{RC}}$$

untuk $t = 0 \rightarrow i = \frac{E}{R}$

Apabila nilai arus turun mencapai 50%, maka:

$\frac{E}{2R} \quad = \quad \frac{E}{R}\, e^{-\frac{t}{RC}}$

$\frac{1}{2} \quad = \quad e^{-t/0.+ .10^6 \text{ x } 5 .10^{-6}}$

$\quad = \quad e^{-\frac{t}{2}}$

$(\frac{1}{2})^2 = e^{-t}$

$\frac{1}{4} \quad = \quad e^{-t} = \frac{1}{e^t}$

$e^t \quad = \quad 4$

$t = \ln 4 = 1{,}39$ detik.

SOAL-SOAL LATIHAN

1. Tentukanlah suku tengah hasil penyelesaian dari $(1+\frac{x}{2})^{10}$
2. Tulislah suku ke-6 dari penyelesaian $(1 + 2x)^{-1}$
3. Perluaslah $(1 + t)^{\frac{1}{2}}$ sampai suku ke - 4
4. Kembangkanlah $\frac{1}{\sqrt{9-3t}}$ sampai suku yang mengandung t^3
5. Hitunglah $\sqrt{108}$ dengan mempergunakan deret Binomial sampai empat decimal.
6. Jika x adalah bilangan yang sangat kecil, maka x^2 dan pangkat-pangkat yang lebih tinggi dapat diabaikan. tulislah hasil aproksimasi untuk $(1 + x)$ dan $(1- x)^{-\frac{1}{2}}$ selanjutnya tentukanlah hasil aproksimasi untuk $\sqrt{(1+x)\,(1-x)}$

7. Suatu metode untuk menghitung nilai konstanta gravitasi "g" adalah dengan mempergunakan ayunan sederhana yang diberikan oleh rumus $T = 2\mu\sqrt{\frac{1}{g}}$ di mana 1 panjang tali dan T adalah waktu untuk satu ayunan penuh. Jika kesalahan dalam pengukuran 1 di perkirakan $\pm$ 0,4 % dan T $\pm$ 0.2 % maka tentukanlah persentase kesalahan yang terjadi dalam perhitungan nilai "g" dengan menggunakan deret binomial.
8. Frekuensi dari suatu getaran dapat dihitung dari rumus $f = \frac{k}{\sqrt{CR}}$, di mana k adalah konstanta. Jika dalam pengukuran diperkirakan terdapat kesalahan $\pm$ 0.4 % untuk C dan $\pm$ 0.6 % untuk R, maka hitunglah persentase kesalahan yang mungkin terjadi dalam perhitungan frekuensi.
9. Hitunglah $i = 1_m\, e^{\frac{Rt}{L}} \sin(2\pi ft + \emptyset)$ apabila diketahui $I_m = 50$, $R = 250$, $t = 0{,}2$. $L = 15$, $f = 50$ dan $\emptyset = \frac{\pi}{3}$
10. Arus i amp dalam suatu rangkaian yang mengandung suatu induktansi L henry dihubungkan seri dengan tahanan R ohm, dan suatu tegangan sumber E volt, diberikan oleh:

$$i = \frac{E}{R}\left(1 - e^{-\frac{Rt}{L}}\right)$$

Jika diberikan E = 240 v, R = 5 Ω, L = 6 H dan $t = 2 \times 10^{-1}$ detik, maka hitunglah nilai dari i.
11. Penyinaran dari bola radio terhadap suatu permukaan metal diberikan oleh :

$$I = AT^2\, e^{-\frac{b}{T}}$$

Hitunglah nilai I jika T = 1500, $b = 5 \times 10^4$, dan $A = 4{,}03 \times 10^6$
12. Kapasitansi antara dua kawat pararel diberikan oleh :

$$C = \frac{k}{\ln\left[{}^{(d-r)}/_{r}\right]}$$

Hitunglah C Jika $k = 26,\ 2 \times 10^{-12}$, d = 25 cm dan r = 0,5 cm.
13. Pengisian suatu kapasitor diberikan oleh rumus ;

$$i = \frac{E}{R}\, e^{-\frac{t}{RC}}$$

Hitunglah nilai i apabila E = 15, $R = 3 \times 10^3$, $t = 10^{-2}$, $C = 5 \times 10^{-6}$

14. Suatu sistem dari n *receiver* dikatakan mempunyai keuntungan ganda apabila diberikan oleh rumus :

$$g = \frac{20}{m}\left(1 - \frac{1}{n}\right) \ln\left(\frac{i}{k}\right)$$

di mana k adalah pembanding terhadap waktu yang terbuang, dan m adalah konstanta untuk sistem ini. Jika m = 2,1, n = 3 dan k = 0,2, maka hitunglah g.

15. Suatu kapasitor C tanpa muatan seri dengan sebuah resistor R dan dihubungkan dengan tegangan sumber konstanta V, dinyatakan:
    (a) mengapakah tegangan dalam kapasitor naik secara perlahan-lahan
    (b) tuliskanlah pernyataan untuk tegangan yang melalui kapasitor setelah t detik.
    (c) lukiskanlah skets kurva tegangan tersebut
    (d) berapakah *time constant*a T,C untuk rangkaian ini.

    Suatu kapasitor dari 10 μ F diisi dengan jalan menghubungkan seri dengan suatu resistor dan suatu baterai daro 100 volt. Berapakah nilai resistor yang dipasang agar *time constant* T.C = 0.1 detik, dan selanjutnya hitung pulalah nilai arus.
    (a) pada saat sakelar terhubung
    (b) setelah waktu yang sama dengan T.C
    (c) Setelah periode waktu yang cukup lama

16. Diberikan $i = \frac{E}{R}\left(1 - e^{-\frac{Rt}{L}}\right)$

    Tulislah rumus untuk t dalam besar-besaran yang lain.

17. Diberikan : $g \frac{V}{r \ln\left(\frac{R}{r}\right)}$

    Ubahlah rumus di atas dengan R sebagai subjek.

18. Diketahui : $C = \frac{k}{\ln\left[{}^{(d-r)}/{}_{r}\right]}$

    Nyatakanlah d dalam C, k dan r.

19. Diketahui : $R = \frac{0.4343\, t}{C \ln\left[\frac{d_1}{d_2}\right]}$

    Nyatakanlah d_1 dalam besar-besaran yang lain.

20. Suatu arus transien 1 amp pada saat t detik diberikan oleh :

$$i = \frac{E}{R}\left(1 - e^{-\frac{Rt}{L}}\right)$$

Jika diketahui perbandingan $\frac{L}{R}$ lebih besar dari t, maka di perlihatkanlah bahwa:

(a) untuk aproksimasi pertama 1 berbanding langsung dengan t

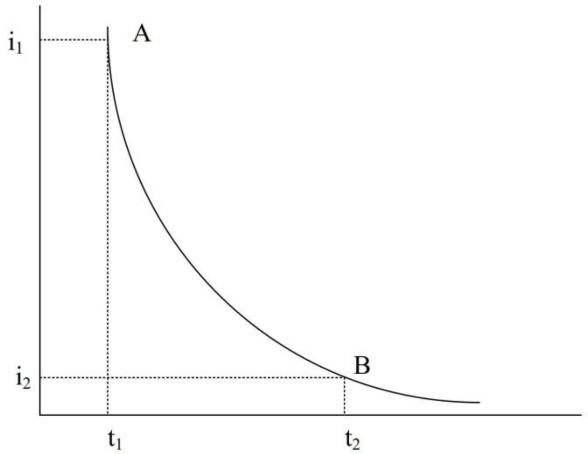
(b) hitunglah nilai t untuk aproksimasi kedua (t^3 dan pangkat yang lebih tinggi dapat diabaikan)

(c) Tulislah rumus untuk L dalam suku-suku dari i, E R dan r.

BAB II

HITUNG DIFERENSIAL

Pada bab I kita telah mendiskusikan mengenai grafik fungsi eksponen serta peranannya dalam bidang ilmu listrik dan elektronika. Dalam rumus $i = I_m e - \frac{t}{RC}$ misalnya, kita dapat menghitung nilai i pada setiap saat t detik atau sebaliknya kita juga dapat menentukan waktu yang diperlukan arus untuk mencapai nilai I amp. Hubungkan antara nilai-nilai arus i dan waktu t dari rumus di atas itu dapat pula dilukiskan kurvanya seperti gambar di bawah ini:

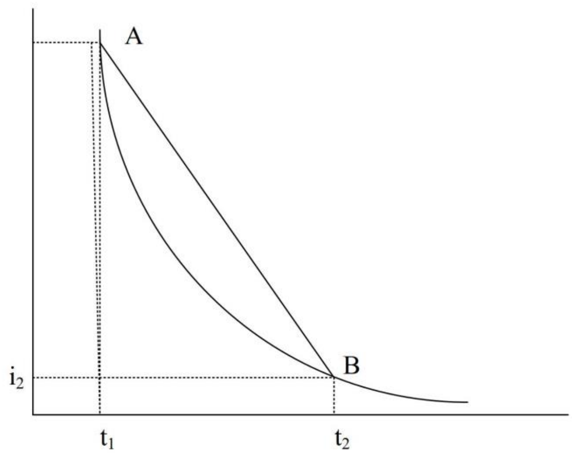


Gambar 2.1

Ketika $t = t_1$arus $i = i_1$ atau sebaliknya. Selanjutnya apabila waktu t mencapai t_2, maka arus juga ikut berubah yang ditunjukkan oleh i_2. Dalam gambar 2-1 di atas, jelas kelihatan bahwa nilai arus antara dua titik A dan B berkurang dalam selang waktu t_2-t_1 detik.

Sekarang timbul pertanyaan apakah yang terjadi dengan arus? jawabannya ialah nilai arus itu berubah dengan berubahnya waktu. Selanjutnya berapakah kecepatan perubahan arus itu pada setiap saat?

Jika seandainya perubahan kecepatan arus itu di mana – mana sama (uniform), maka perubahan rata – rata arus persatuan waktu antara A dan B adalah $\frac{AC}{CB}$. Akan tetapi apabila perubahan kecepatan arus itu di mana – mana sama maka grafiknya haruslah sebuah garis lurus, jadi anggapan di atas itu tidaklah benar sama sekali, karena luas antara tali busur dan kurva yang ikut diukur merupakan suatu kesalahan.



Gambar 2.2

Untuk mengatasi hal ini maka kita pilihlah jarak antara A dan B itu yang sekecil-kecilnya dengan perkataan lain hampir mendekati nol, dan dengan demikian uraian kita sampai pada suatu bentuk perbandingan antara dua besaran yang sekecil-kecilnya di mana yang satu tergantung kepada yang lainnya, jadi:

$$\frac{\text{arus yang tak terhingga kecilnya}}{\text{waktu yang tak terhingga kecilnya}}$$

Apakah yang dimaksud atau apakah artinya perbandingan tersebut di atas? Problem seperti kita pecahkan dalam hitung Diferensial namanya.

Tentu saja, bukan hanya menyangkut dengan persoalan arus, akan tetapi, menyangkut banyak problema, oleh sebab itu selanjutnya kita pergunakan variabel yang lebih umum yakni x dan y.

II.1. DIFERENSIAL DAN HASIL BAGI DIFFERENSIA

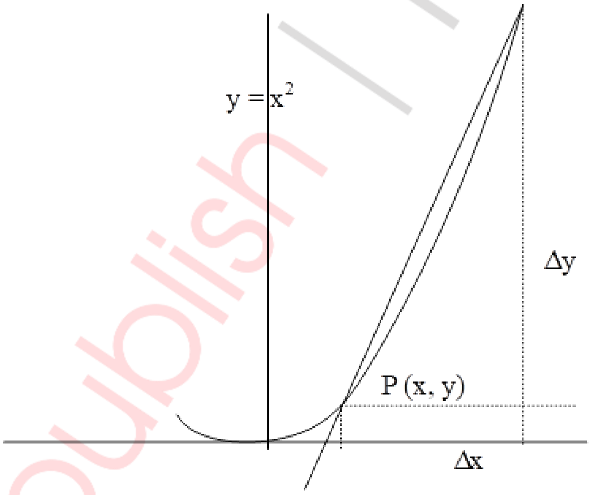
Pandanglah suatu titik P (x,y) pada grafik y = x2. Bila titik P bergerak sepanjang grafik ke Q, maka terjadilah perubahan koordinat P menjadi Q (x + $\Delta\,x, y + \Delta y$) dengan Δx dan Δy masing – masing sebagai perubahan x dan y (diferensial).

Selisih harga fungsi untuk kedua titik ini ditentukan sebagai berikut:

$$\begin{array}{llcl} Q = (x + \Delta x, y + \Delta y) & : \; y + \Delta y & = & (x + \Delta x)^2 \\ P(x, y) & : \; y & = & x^2 \\ \hline & \quad\quad y & = & 2\,x\,\Delta\,x + \Delta\,x^2 \end{array}$$

Δx dan Δy masing – masing disebut differensi x dan differensi x

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2x\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} = 2x + \Delta x$$



Gambar 2.3

<u>HASIL BAGI DIFERENSIAL</u>

Jika $\Delta\,x \;\rightarrow 0$ maka $\underset{\Delta x \rightarrow 0}{\text{lin}} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \underset{x \rightarrow 0}{\text{lin}} 2x + \Delta x = 2x$

Hasil limit ini disebut hasil Bagi Diferensial dan dinyatakan dengan notasi :

$$\frac{dy}{dx}, \frac{df(x)}{dx} \;; y' \text{atau } f'(x)$$

Jadi : $\frac{dy}{dx} = \lim_{x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x$

Menentukan $\frac{dy}{dx}$ dari suatu fungsi y = f (x) disebut mendiferensialkan fungsi tersebut atau mencari fungsi tersebut atau mencari fungsi turunan. Perlu dicatat bahwa $\frac{dy}{dx}$ bukanlah hasil bagi biasa, akan tetapi berasal dari limit hasil bagi, oleh sebab itu $\frac{dy}{dx}$ dibaca dydx dy per dx.

Secara umum untuk semua fungsi y = f (x) berlaku :

$$y + \Delta y = f\,(x + \Delta x)$$
$$y \ = f\,(x)$$
$$y = f\,(x + \Delta x) \text{ dan}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f\,(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = I'(x)$$

<u>Tinjauan Secara Grafis</u>

Sekarang kedua titik P dan Q kita hubungan dengan sebuah garis lurus yang selanjutnya kita sebut tali busur PQ, sedangkan hasil Diferensial $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \text{tg} \propto$. $\propto$ adalah sudut yang dibentuk oleh tali busur PQ dengan poros x positif.

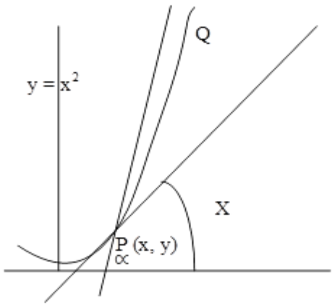
Jika $\Delta x \to 0$, maka $Q \to P$ dan tali busur PQ dengan sentral P akan berputar ke kanan sehingga limit kedudukan PQ menjadi garis singgung atau tangen pada tinggi P.

Dan $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} = \text{tg} \propto$; di mana $\propto$

adalah sudut di titik P dengan poros X positif. Jelaslah sekarang bahwa turunan pertama dari fungsi y = f (x) pada suatu titik P sama dengan condongnya garis singgung pada grafik fungsi tersebut di titik P.

Jadi bila $P(x_0, x_0)$ pada kurva y = f (x), maka persamaan garis singgung di P adalah :

$$y - y_0 = \frac{dy}{dx}\ x = x_0\ (x - x_0)$$



Gambar 2.4

II.2. RUMUS – RUMUS DASAR HITUNG DIFERENSIAL

Jika u, v dan w ……………. adalah fungsi – fungsi dari x maka :

(1)	y = cu	: y' = cu'
(1a)	$y = cu^m$	: $y' = mcu^{m-1}$
(2)	$y = u \pm v$	: $y' = u' \pm v'$
(2a)	$y = u \pm v \pm w \pm ...$	: $y' = u' \pm v' \pm w' \pm ...$
(3)	y = uv	: y' = u'v + v'u
(3a)	y = uvw	: y'=u'vw + v'uw + w'uv
(3b)	y = uvw ………..rs	: y' = u'vw … rs + s'uvw … r
(4)	$y = \frac{U}{V}$	: $y' = \frac{vu'-uv'}{v^2}$

Bukti :

(1) Yy = cu

$\frac{y+\Delta y=c(u+\Delta u)}{=c\,\Delta\, u}$ dengan Δu sebagai perubahan

$$u\frac{\Delta y}{\Delta x} = c\frac{\Delta u}{\Delta x}\ ; \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} \lim_{\Delta x \to 0} c\frac{\Delta u}{\Delta x}$$

(1a) Perluasan (1) $y' = c \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta U}{\Delta X} = cu'$

(2) $y = u \pm v$, jika y berubah dengan Δy, maka u dan v secara simultan berubah dengan Δu dan Δv.

$$\frac{y = u + v}{y = \Delta u \pm \Delta v}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} \pm \frac{\Delta v}{\Delta x}\ ; \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\Delta u}{\Delta x} \pm \frac{\Delta v}{\Delta x}\right)$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x} \pm \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\Delta u}{\Delta x} \pm \frac{\Delta v}{\Delta x}\right)$$

$$y' = u' \pm v'$$

(2a) Perluasan dari 2.

(3) y = uv

$$y + \Delta y = (u + \Delta u)(v + \Delta v) = uv + u\Delta v + v\Delta u + \Delta u\Delta v$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta x} + v\frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta u\Delta v}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (u\frac{\Delta v}{\Delta x} + v\frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta u \Delta v}{\Delta x}$$
$$= \lim u\frac{\Delta v}{\Delta x} + \lim v\frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta u \Delta v}{\Delta x}$$
$$y' = uv' + vu'$$

(3a) dan (3b) perluasan dari (3)

(4) $y = \frac{u}{v}$ atau u = vy dengan batuan (3)

$u' = vy' + y\,v'$ atau

$vy' = u' - yv'$

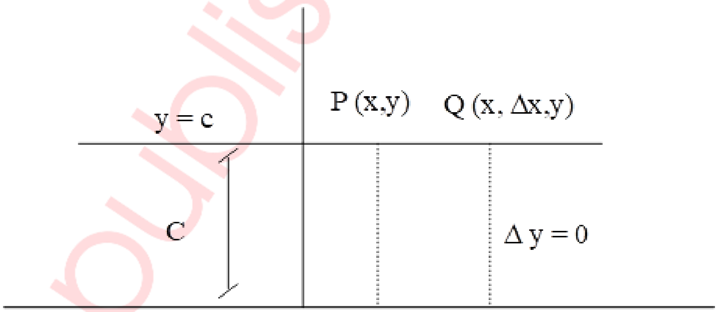
$$y' = \frac{u' - yv'}{v} = \frac{u' - \frac{u}{v}v'}{v}$$

$$y' = \frac{vu' - uv'}{v^2}$$

II.3. HASIL BAGI DIFERENSIAL FUNGSI – FUNGSI ELEMENTER

II.3.1. Turunan Fungsi Aljabar

(1) y = c



Gambar 2.5

Setiap perubahan x dengan Δx , y *constant*:

Jadi, $y = 0$ dan $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 0$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0 \qquad y' = 0$$

$$y = c \to y' = 0$$

(2) y = x

$$\begin{array}{l} y + \Delta y = x + \Delta x \\ \underline{y \qquad = \Delta x} \\ \qquad 2y = \Delta x \end{array}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 1\ ;\ \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 1 \text{ atau } y' = 1$$

$$y = x \to y' = 1$$

(3) $y = x^n$

$$y + y = (x + (x)^n += x^{n-1} + (x) \binom{n}{2} x^{n-2} \Delta x^2 + x \ldots + x x^n$$

y .... + $x^n x^n$

$$\Delta y = \binom{n}{11} x^{n-1} \Delta x + \binom{n}{2} x^{n-2} \Delta x^2 + \ldots\ldots +x^{n-1}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \binom{n}{11} x^{n-1} \Delta x + \binom{n}{2} x^{n-2} \Delta x^2 + \ldots\ldots +x^{n-1}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = (n) x^{n-1} = n x^{n-1}$$

$$y = x^n \to y' = n x^{n-1}$$

II.3.2. Turunan Fungsi Goniometri

(1) Tuntutan y = sin cx

$$y = \Delta y = \sin(x + \Delta x)$$

$$y = \sin x$$

$$\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x}$$

$$= \frac{\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\frac{\Delta x}{2}}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim \frac{\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\frac{\Delta x}{2}} = \cos x$$

$$y = \sin x \to y' = \cos x$$

(2) Turunan y = cos x

$$\Delta y = \cos(x + \Delta x) - \cos x$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\cos(x + \Delta x) - \cos x}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim - \frac{\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\cos\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\frac{\Delta x}{2}} = -\sin x$$

$$y = \cos x \to y' = -\sin x$$

(3) Turunan y = tg x

$y = \text{tg}\, x = \frac{\sin x}{\cos x}$; dengan II. 2. (4)

u = sin x u' = cos x

v = cos x v' = - sin x

$$y = \frac{vu - uv}{v^2} = \frac{\cos x . \cos x - \sin x . -\sin x}{(\cos x)^2}$$

$$= \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$$

$$y = \text{tg}\, x \to y' = \sec^{2\,x}$$

(4) Turunan y = cotg x

$$y = \text{cotg}\, x = \frac{\cos x}{\sin x} \to u = \cos x \,;\, u' = -\sin x$$

$$v = \sin x \,;\, v' = \cos x$$

$$y' = \frac{vu' - uv'}{v^2} = \frac{\sin x - \sin x - \cos x . \cos x}{(\sin x)^2}$$

$$= \frac{-\sin^2 x + \cos^2 x)}{\sin^2 x} = \frac{-1}{\sin^2 x}$$

$$y = \text{cotg}\, x \to y' = -\text{cosec}^2 x$$

(5) Turunan y = sec x

$$y = \sec x = \frac{1}{\cos x} \to u = 1 \,;\, u' = 0$$

$$v = \cos x \,;\, v' = -\sin x$$

$$y' = \frac{vu' - uv'}{v^2} = \frac{\sin x}{\cos^2 x} = \text{tg}\, x \sec x$$

$$y = \text{sex} \to y' = \text{sex}\, x\ \text{tg}\, x$$

(6) Turunan y = cosec x

$$y = \text{cosec}\, x = \frac{1}{\sin x} \rightarrow u = 1\, ;\, u' = 0$$

$$v = \sin x\, ;\, v' = \cos x$$

$$y' = \frac{-\cos x}{(\sin x)^2} = \frac{1}{\sin^2 x} = -\text{cotg}\, x\, \text{cosec}\, x$$

$$y = \text{cosec}\, x \rightarrow y' = -\text{cosec}\, x\, \text{cotg}\, x$$

II.3.3. Turunan Fungsi Logaritma

$y = 1n\, x$

$y = \Delta y = 1n\, (x + \Delta x)$

$y = 1n\, x$

$y = 1n\, (x + \Delta x) - 1n\, x$

$$= 1n \frac{x + \Delta x}{x} = 1n\, \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x} 1n\, \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right) 1n\, \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right) \frac{1}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 1n \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right) \frac{x}{\Delta x} = \frac{1}{x}$$

$$= \frac{1}{x} 1n \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 1n \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right) \frac{x}{\Delta x} = \frac{1}{x}$$

$$y = 1n\, x \rightarrow y' = \frac{1}{x}$$

II.3.4. Turunan Fungsi Eksponen

$y = e^x\, ;\, 1n\, y \; = x$ (dengan 1.3.3)

$$\frac{1}{y} y' = 1$$

$$y \; = e^x \rightarrow y' = e^x$$

II.3.5. Turunan Fungsi Pangkat

$y = a^x\, ;\, 1n\, y = x\, 1n\, a$ (dengan II.3.3. dan I. 2. (1))

$$\frac{y'}{y} = 1n\, a \rightarrow y' = y\, \text{In}\, a$$

$$= a^x\, \text{In}\, a$$

$$y = a^x \rightarrow y' = a^x\, \text{In}\, a$$

II.3.6. Turunan Fungsi Siklometri

1. Turunan y = arc sin x $\left(-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}\right)$

   y = arc sin x atau x = sin y

$$\frac{dx}{dy} = \cos y$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$y = \arcsin x - y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

2. Turunan y = arc cos x $(0 \leq y \leq \pi)$

   $y = -\arccos x$ atau $x = \cos y$

$$\frac{dx}{dy} = -\sin y$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\sin y} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$y = \arccos x \rightarrow y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

3. Turunan y = arc tg x $\left(-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}\right)$

   y = arc tg x atau x = tg y

$$\frac{dx}{dy} = \sec^2 y$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\sec^2 y} = \frac{1}{1+x^2}$$

$$y = \text{arc tg } x \rightarrow y' = \frac{1}{1+x^2}$$

4. Turunan y = arc sec x $(0 \leq y \leq \pi)$

   y = arc cotg x atau x = cotg y

$$\frac{dx}{dy} = \text{cosec}^2 y$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\text{cosec}^2\, y} = \frac{1}{1+x^2}$$

$$y = \text{arc tg } x \rightarrow y' = \frac{1}{1+x^2}$$

5. Turunan y = arc sec x $\left(0 \le y \le \frac{\pi}{2}\right)$

y = arc sec x atau x = sec y

$$\frac{dx}{dy} = \sec y \operatorname{tg} y$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\sec y \operatorname{tg} y} = \frac{1}{\sec y \sqrt{\sec^2 y - 1}}$$

$$= \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$$

$$y = \operatorname{arc} \sec x \quad y' = \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$$

6. Turunan y = arc cosec x $\left(0 \le y \le \frac{\pi}{2}\right)$

y = arc cosec x atau x = cosec y

$$\frac{dx}{dy} = -\operatorname{cosec} y \operatorname{cotag} y$$

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{1}{\operatorname{cosec} y \sqrt{\operatorname{cosec}^2 x - 1}}$$

$$= \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$$

$$y = \operatorname{arc} \operatorname{cosec} x \rightarrow y' = \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$$

II.3.7. <u>Turunan Fungsi Hiperbolis</u>

1. Turunan y = sinh x

$y = \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ (dengan II.2-1a dan II.3.4)

$$y' = \frac{e^x - e^x}{2} = \cosh x$$

$$y = \sinh x \rightarrow y' = \cosh x$$

2. Turunan y = cosh x

y = cosh x = $\frac{e^x - e^{-x}}{2}$

$$y = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh x$$

$$y = \cosh x \rightarrow y' = \sinh x$$

3. Turunan y = tgh x $\frac{\sinh x}{\cosh x}$ = (dengan IV. 2.4)

$$y = \text{tgh } x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = (\text{dengan IV. } 2.4)$$

$$y, = \frac{\cosh x . \cosh x - \sinh x . \sinh x}{\cosh^2 x}$$

$$= \frac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{\cosh^2 x} = \frac{1}{\cosh^2 x} = \cosh^2 x$$

$$y = \text{tgh } x \rightarrow y' = \text{sech}^2 x$$

4. Turunan y = cotgh x

$$y = \text{cotgh } x = \frac{\cosh x}{\sinh x}$$

$$y' = \frac{\sinh x - \sinh x - \cosh x \cosh x}{\sinh^2 x}$$

$$= \frac{\sinh^2 x - \cosh^2 x}{\sinh^2 x} = \frac{-1}{\sinh^2 x} = -\text{cosech}^{2\,x}$$

$$y = \text{cotgh } x \rightarrow y' = -\text{cosech}^{2\,x}$$

5. Turunan y = sech x

$$y = \text{sech } x = \frac{1}{\cosh x}$$

$$y' = \frac{\sinh x}{\cosh^2 x} = -\text{sech } x \text{ tgh } x$$

$$y = \text{sech } x = \frac{1}{\cosh x} \rightarrow y' = -\text{sech } x \text{ tgh } x$$

6. Turunan y = cosech x

$$y = \text{cosech } x = \frac{1}{\sinh x}$$

$$y' = -\frac{\text{cosech } x}{\sinh^2 x} = \text{cosech } x \text{ cotgh}$$

$$y = \text{cosech } x \rightarrow y' = -\text{cosech } x \text{ cotgh } x$$

II.3.8. Turunan Fungsi Hiperbolis Invers

1. Turunan y = arcsinh x

   y = arcsinh x ; sinh y

$$\frac{dy}{dx} = \cosh y$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cosh y} = \frac{1}{\sqrt{1 + \sinh^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$$

$$y = \operatorname{arcsinh} x \qquad y' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

2. Turunan y = arc cosh x

   y = arc cosh x ; x = arc cosh y

$$\frac{dy}{dx} = \sinh y$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sinh y} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

$$y = \text{arc}\cosh x \qquad y' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\ (x > 1)$$

3. Turunan y = arc tgh x

   y = arc x ; x = tgh y

$$\frac{dy}{dx} = \text{sech}^2\, y$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\text{sech}^2\, y} = \frac{1}{1 - \text{tgh}^2\, y} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$y = \text{arc tgh} \rightarrow y' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\ (x^2 < 1)$$

4. Turunan y = arc coth x

   y = arc coth x ; x = coth y

$$\frac{dy}{dx} = -\text{cosech}^2\, y$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\text{cosech}^2\, y} = \frac{1}{1 - \coth^2 y}$$

$$y = \text{arc}\coth x \rightarrow y' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\ (x^2 < 1)$$

5. Turunan y = arc sech x

y = arc sech x ; x = sech y

$$\frac{dy}{dx} = -\operatorname{sech} y \operatorname{tgh} y$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\operatorname{sech} y \operatorname{tgh} y} = \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}$$

$$y = \operatorname{arc\,sech} x \rightarrow y' = \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}} \; (0 < x < 1)$$

6. Turunan y = arc cosech x

y = arc cosech x ; x = cosech y

$$\frac{dy}{dx} = -\operatorname{cosech} y \operatorname{cotgh} y$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{-1}{\operatorname{cosech} y \operatorname{cotgh} y} = \frac{-1}{x\sqrt{1+x^2}}$$

$$y = \operatorname{arc\,cosech} x \rightarrow y' = \frac{1}{x\sqrt{1+x^2}} \; (x \neq 0)$$

II.4. RUMUS – RUMUS TURUNAN

Andaikan u, v, w, …………………..adalah fungsi – fungsi dari x dan a, c, m, dan n adalah konstanta :

1. $\frac{dc}{dx} = 0$
2. $\frac{dy}{dx} = 1$
3. $\frac{dx^n}{dx} = nx^{n-1}$
4. $\frac{d}{dx}(cu) = c\frac{du}{dx}$
5. $\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{c}\right)\frac{1}{c} = \frac{du}{dx}$
6. $\frac{d}{dx} = (u + v) = \frac{du}{dx} \pm \frac{dv}{dx}$
7. $\frac{d}{dx} = (u \pm v \pm w \pm \dots\dots\dots) = \frac{du}{dx} \pm \frac{d}{dx} \pm \frac{dw}{dx} \pm \dots\dots\dots$
8. $\frac{d}{dx} = (u.v) = u\frac{dv}{dx} + v\,\frac{du}{dv}$

9. $\frac{d}{dx} = (uvw) = uv\,\frac{dw}{dx} + uw\,\frac{dv}{dx} + vw\,\frac{du}{dx}$

10. $\frac{d}{dx} = (uvw \ldots \ldots rs) = uvw \ldots \ldots r\frac{ds}{dx} + \; + vw\,rs\frac{du}{dx}$

11. $\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}$

12. $\frac{d}{dx}\,(u^m) = \; mu^{m-1}$

13. $\frac{d}{dx}(\text{In } u) = \frac{1}{u}\,\frac{du}{dx}$

14. $\frac{d}{dx}(a_{\log}\,u) = \frac{1}{u\,\text{In } a} = \frac{du}{dx}$

15. $\frac{d}{dx}(a^u) = a^u\text{In } a\,\frac{du}{dx}$

16. $\frac{d}{dx}\,(e^u) = e^u\frac{du}{dx}$

17. $\frac{d}{dx}\,(u^v) = u^v\,\left(\frac{v}{u}\,\frac{d}{dx} + \text{In } u\,\frac{dv}{dx}\right)$

18. $\frac{d}{dx}(\sin u) = \cos u\,\frac{du}{dx}$

19. $\frac{d}{dx}\,(\cos u) = \; -\sin u\,\frac{du}{dx}$

20. $\frac{d}{dx}\,(\,\text{tg } u) = \; \sec^2 u\frac{du}{dx}$

21. $\frac{d}{dx}(\text{cotg } u) = \; -\,\text{cosec}^2\;u\,\frac{du}{dx}$

22. $\frac{d}{dx}(\sec u) = \sec u\,\text{tg } u\,\frac{du}{dx}$

23. $\frac{d}{dx}\,(\text{cosec } u) = \; -\text{cosec } u\,\text{cotg } u\,\frac{du}{dx}$

24. $\frac{d}{dx}\,(\arcsin u) = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\,\frac{du}{dx}$

25. $\frac{d}{dx}\,(\text{arc}\cos u) = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\,\frac{du}{dx}$

26. $\frac{d}{dx}\,(\text{arc tg } u) = \frac{1}{1-u^2}\,\frac{du}{dx}$

27. $\frac{d}{dx}\,(\text{arc cotg } u) = \; -\,\frac{1}{1+u^2}\,\frac{du}{dx}$

28. $\frac{d}{dx}\,(\text{arc sec } u) = -\frac{1}{u\sqrt{u^2-1}}\,\frac{du}{dx}$

29. $\frac{d}{dx}$ (arc cosec u) $= \cosh u \frac{du}{dx}$

30. $\frac{d}{dx}(\sinh u) = \cosh\ u \frac{du}{dx}$

31. $\frac{d}{dx}(\cosh u) = \sinh u \frac{du}{dx}$

32. $\frac{d}{dx}(\text{ tgh } u\ ) = \ \text{sech}^2\ u \frac{du}{dx}$

33. $\frac{d}{dx}(\text{cotgh } u) = \ -\text{cosech}^2\ u \frac{du}{dx}$

34. $\frac{d}{dx}(\text{sech } u) = -\text{sech } u \text{ tgh } u \frac{du}{dx}$

35. $\frac{d}{dx}(\text{cosech } u) = -\text{cosech } u \text{ cotgh } u \frac{du}{dx}$

36. $\frac{d}{dx}(\text{arc sinh } u) = \frac{1}{\sqrt{u^2+1}} \frac{du}{dx}$

37. $\frac{d}{dx}(\text{arc cosh } u) = \frac{1}{\sqrt{u^2-1}} \frac{du}{dx}$

38. $\frac{d}{dx}(\text{arc tgh } u) = \frac{1}{1-u^2} \frac{du}{dx}$

39. $\frac{d}{dx}(\text{arc sech } u) = -\frac{1}{u\sqrt{1-u^2}} \frac{du}{dx}$

40. $\frac{d}{dx}(\text{arch cosech } u) = -\frac{1}{u\sqrt{1+u^2}} \frac{du}{dx}$

II.5. CONTOH – CONTOH PENYELESAIAN SOAL

Rumus – rumus No. 1 sampai dengan No. 12

1. Tentukanlah $\frac{dy}{dx}$ dari $y = x^3$

   Jawab : $\frac{dy}{dx} = 3\ x^{3-1} = 3\ x^2$

2. Hitunglah : $\frac{dv}{dR} =$ dari $v = 4\pi R^3$

   Jawab : $\frac{dv}{dR} = 4\pi.3R^2 = 12\pi R^2$

3. Tentukanlah $\frac{ds}{dt}$ dari $s = 2t^3 - t^2 + 3\,t + 1$

   Jawab : $\frac{ds}{dt} = 6t^2 - 2t + 3$

4. Hitunglah $\frac{dy}{dx}$ dari $y = \frac{3}{\sqrt{x}}$

Jawab : $y = \frac{3}{\sqrt{x}} = 3.x^{-\frac{1}{2}}$

$$\frac{dy}{dx} = 3.\left(-\frac{1}{2}\right)x^{-\frac{1}{2}} - 1$$

$$= -\frac{3}{2}x^{-\frac{3}{2}} = -\frac{3}{2x\sqrt{x}}$$

5. Tentukanlah $\frac{dy}{dx}$ dari $y = x^5 - 2x^3 + \frac{11}{\sqrt{x}} + 6$

Jawab : $y = x^5 - 2x^3 + \frac{11}{\sqrt{x}} + 6$

$$= x^5 - 2x^3 + 11\,x^3 + 11x^{-\frac{1}{2}} + 6$$

$$\frac{dy}{dx} = 5x^4 - 6x^2 - \frac{11}{2}x^{\frac{3}{2}}$$

$$= 5x^4 - 6x^2 - \frac{11\sqrt{x}}{2x^2}$$

6. Tentukanlah $\frac{dv}{dt}$ dari $v = (t+3)\sqrt{t^2+1}$

Jawab : $\frac{dv}{dt} = (t+3)\frac{d}{dt}\sqrt{t^2+1} + \sqrt{t^2+1}\,\frac{d}{dt}(t+3)$

$$= (t+3)\,.\frac{1}{2}\,(t^2+1)^{-\frac{1}{2}}\frac{d}{dt}(t^2+1) + \sqrt{t^2+1}$$

$$= (t+3)\,.\frac{1}{2}\,(t^2+1)^{-\frac{1}{2}}\,.\,2t + \sqrt{t^2+1}$$

$$= \frac{2t^2+3t+1}{\sqrt{t^2+1}}$$

7. Diketahui $f(x) = \frac{(a-x)(2-x)}{\sqrt{x-a}}$; Hitung $f'(x)$

Jawab : $f(x) = \frac{(a-x)(2-x)}{\sqrt{x-a}} = (a-x)(2-x)(x-a) - \frac{1}{2}$

$$f(x) = (a-x)(2-x)\frac{d}{dx}(x-a)^{-\frac{1}{2}} + (a-x)(x-a)^{-\frac{1}{2}}\frac{d}{dx}$$

$$(2-x) + (a-x)(x-a)^{-\frac{1}{2}}\frac{d}{dx}(a-x)$$

$$= \frac{1}{2}(a-x)\,(2-x)(x-a)^{-\frac{3}{2}} + (a-x)(x-a)^{-\frac{3}{2}}(-1) + (2-x)$$

$$(x-a)^{-\frac{1}{2}}(-1)$$

$$= \frac{-x^2+(6-a)x+2a^2-4a}{2(x-a)\sqrt{x-a}}$$

8. Tentukan $\frac{dy}{dx}$ dari $y = \sqrt[3]{\frac{1+x}{1-x}}$

Jawab : $y = \sqrt[3]{\frac{1+x}{1-x}} = (\frac{1+x}{1-x})^{-\frac{1}{3}}$

$= \frac{1}{3} (\frac{1+x}{1-x})^{-\frac{2}{3}} \frac{d}{dx} (\frac{1+x}{1-x})$

$= \frac{1}{3} (\frac{1+x}{1-x})^{-\frac{2}{3}} \frac{(1-x)(1)-(1+x)(-1)}{(1-x)^2}$

$= \frac{2}{3(1-x)^2} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$

Rumus – rumus No. 13 sampai No. 17

9. Hitunglah y' dari :

a. $y = \text{In}\ (x + \sqrt{1+x^2})$

b. $y = \log \frac{x}{x^2-1}$

Jawab :

a. $y' = \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}} \frac{d}{dx} (x + \sqrt{1+x^2})$

$= \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}} \{1 + \frac{1}{2} (1+x^2)^{-\frac{1}{2}}$

b. $y' = \frac{1}{\frac{x}{x^2-1} \text{In}\ 10} \frac{d}{dx} (\frac{x}{x^2-1})$

$= \frac{x^2-1}{x\ \text{In}\ 10} \frac{(x^2-1)\ (1)-(x)\ (2x)}{(x^2-1)^2}$

$= \frac{x^2-1}{x\ \text{In}\ 10} \cdot \frac{x^2-1}{(x^2-1)^2} = \frac{-\ x^2-1}{x(x^2-1)\text{In}\ 10}$

10. Tentukanlah $\frac{dy}{dx}$ dari :

a. $a^{1-\frac{t^2}{2}}$

b. $y = e^{\frac{1}{2}t^2-t+1}$

Jawab :

a. $\frac{dy}{dx} = a^{1-\frac{t^2}{2}}\ \text{In}\ a \frac{d}{dt} \left(1 - \frac{t^2}{2}\right) = a^{1-\frac{t^2}{2}}\ \text{In}\ a(-t) = -t\, a^{1-\frac{t^2}{2}}\ \text{In}\ a$

b. $\frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}\left(e^{\frac{1}{2}t^2 - t + 1}\right)$

$= e^{\frac{1}{2}t^2 - t + 1}\ \frac{d}{dt}\ (\frac{1}{2}\ t^2 - t + 1)$

$= (t - 1)\ e^{\frac{1}{2}t^2 - t + 1}$

11. Hitunglah $\frac{di}{dt}$ dari $i = \frac{E}{R}\left(1 - e^{\frac{Rt}{L}}\right)$

Jawab : $\frac{di}{dt} = \frac{E}{R}(0) - \frac{E}{R}\, e^{\frac{Rt}{L}}\ (-\frac{R}{L}) = \frac{E}{R}\, e^{\frac{Rt}{L}}$

12. Tentukanlah $\frac{dv}{dt}$ dari $V = V\ e^{\frac{t}{RC}}$

Jawab : $\frac{dv}{dt} = V\ e^{\frac{t}{RC}} . \left(-\frac{1}{RC}\right)$

$= -\frac{V}{RC} e^{e\,\frac{t}{RC}}$

13. Diketahui f (x) = x^x, Hitunglah f’ (x)

Jawab : f (x) = $x^x \left(\frac{x}{x}\ \frac{dx}{dx} + \text{In}\ \frac{dx}{dx}\right)$

$= x^x\ (1 + \text{In}\ x)$

14. Tentukan $\frac{ds}{dt}$ dari $S = t^{t^t}$

Jawab : Misalkan u = t ; r = t^t (rumus 17)

$= \frac{ds}{dt} = t^{t^t}(\frac{t^t}{t}\ \frac{dt}{dt} + \text{In}\ t\ d\frac{t^t}{dt}$ (dengan soal 17)

$= t^{t^t}[\frac{t^t}{t}\ \frac{dt}{dt}\ \text{In}\ t\ \{t^t(1 + \text{In}\ t)\}]$

$= t^{t^t}\ \frac{t^t}{t}\ \left(\frac{1}{t} + \text{In}\ t + \text{In}^2\ t\right)$

Rumus – rumus No. 18 sampai dengan No. 23

15. Tentukanlah $\frac{dv}{d\theta}$ dari V = sin (aθ + b)

Jawab : $\frac{dv}{d\theta} = \cos(a\theta + b) . a$

$= a \cos\ (a\theta + b)$

16. Hitunglah $\frac{di}{dt} =$ dari $i = e^{-t} \sin\left(2\pi ft + \frac{\pi}{3}\right)$

Jawab : $\frac{di}{dt} = e^{-t}\cos\left(2\pi ft + \frac{\pi}{3}\right).(2\pi f) + \sin\left(2\pi ft + \frac{\pi}{3}\right).(-e^{-t})$

$= e^{-t}[2\pi f\cos\ (\cos 2\pi ft + \frac{\pi}{3})\ - \sin 2\pi ft + \frac{\pi}{3})\ ]$

17. Hitunglah $\frac{di}{dt}$ dari i = 2 sin wt cos wt

Jawab : $\frac{di}{dt}$ = 2 sin wt . (- w sin wt) + cos wt (2 w cos wt)

= (2 w ($\cos^2$ wt – $\sin^2$ wt)

18. Tentukanlah $\frac{dy}{dx}$ dari :

a. $y = \text{cotg}\ (ax^2 + b)$

b. $y = \sec\sqrt{x}$

c. $y = \sin 3\ x \cos x^3$

Jawaban :

a. $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\{\text{cotg}\ (ax^2 + b)\}$

$= \text{cosec}^2\ (ax^2\ + b)\frac{d}{dx}(ax^2 + b)$

$= -2\ ax\ \text{cosec}^2\ (ax^2 + b)$

b. $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\ (\sec\sqrt{x})$

$= \sec\sqrt{x}\ \text{tg}\sqrt{x}\ \frac{d}{dx}\ (\sqrt{x})\ = \frac{\sec\sqrt{x}\sqrt{\text{tg}\ x}}{\sqrt[2]{x}}$

c. $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(\sin 3\ x \cos x^3)$

$= \sin 3x\ \frac{d}{dx}(\cos x^3) + \cos x^3\ \frac{d}{dx}(\sin 3x)$

$= \sin 3x\ (-\sin x^3)\ (3\ x^2) + \cos x^3\ (\cos 3x)\ (3)$

$= 3\ x^2 \sin x^3 \sin 3x + \cos x^3 \cos 3x^2$

Rumus – rumus No. 24 sampai dengan 29.

19. Hitunglah y’ dari :

a. $y = \text{arc}\sin\sqrt{1 + x^2}$

b. $y = \text{arc tg}\sqrt{x}$

c. $y = \text{arc}\cos 5\ x^2$

Jawab :

a. $y' = \frac{1}{\sqrt{1-(1-x^2)}}\ \frac{d}{dx}\ (\sqrt{1 - x^2})$

$= \frac{1}{x}.\frac{1}{2}\ (1 - x^2)^{-\frac{1}{2}}.(-2x)\ = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

b. $y' = \frac{1}{1+x}\frac{d}{dx}\left(\sqrt{x}\right) = \frac{1}{2\,(1+x)\sqrt{x}}$

$= \frac{\sqrt{x}}{ax\,(1+x)}$

c. $y' = \frac{1}{5x^3\sqrt{(5x^3)^2-1}}\frac{d}{dx}\,(5x^3)$

$= \frac{1}{5x^3\sqrt{25\,x^6-1}} = \frac{1}{x\sqrt{25\,x^6-1}}$

20. Tentukan $\frac{dy}{dx}$ dari :

a. $y = \frac{1}{\sinh x}$

b. $y = \cosh^2 5x$

Jawab :

a. $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\sinh x}\right) = \frac{d}{dx}\,(\text{cosech } x)$

$= -\text{ cosech } x \text{ cotg } x$

b. $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(\cosh^2 5x) = \frac{d}{dx}\,(\cosh 5x)^{\,2}$

$= 2\cosh 5x\,\frac{d}{dx}\,(\cosh 5x)$

$= 2\cosh 5x \,.\, \sinh 5x \,.\, 5$

$= 10\sinh 5x\cosh 5x = 5\sinh 10x$

21. Tentukan y dari :

a. y = arc sinh $\frac{1}{2x}$

b. y = arc tgh (cos x)

Jawaban :

a. $y' = \frac{1}{\sqrt{1+(\frac{1}{2x})^2}}\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2x}\right)$

$= \frac{2x}{\sqrt{1+4x^2}}\frac{d}{dx}\,(2x)^{-1} = \frac{2x}{\sqrt{1+4x^2}}$

$(\frac{1}{2x^2}) = \frac{1x}{\sqrt{1+4x^2}}$

b. $y' = \frac{1}{1-\cos^2 x}\frac{d}{dx}\,(\cos x) = \frac{\sin x}{\sin^2 x}$

= - cosec x

II.6. TURUNAN FUNGSI DENGAN PARAMETER

Apabila diketahui :

$$y = f\ (t) \text{ dan } x = g\ (t), \text{ maka :}$$

$$\frac{dy}{dt} = y = f'(t)\ ;\ \frac{dx}{dt} = x = g'(t)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dv}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{f'(t)}{g'(t)} \text{ atau } y' = \frac{y}{x}$$

Contoh :

Tentukanlah $\frac{dy}{dx}$ dari :

a. $x = a(t - \sin t)$

 $y = a(1 - \cos t)$

b. $x = e^{-at}$

 $y = e^{at}$

Jawab :

a. $x = a(t - \sin t) \rightarrow \frac{dx}{dt} = a(1 - \cos t)$

 $y = a(1 - \cos t) \rightarrow \frac{dy}{dt} = a \sin t$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dv}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\sin t}{1 - \cos t}$$

$$= \frac{2 \sin \frac{1}{2} t \cos \frac{1}{2} t}{} = \text{cotg } \frac{1}{2}\ t$$

b. $x = e^{-at} \rightarrow \frac{dx}{dt} = a\ e^{-at}$

 $y = e^{at} \rightarrow \frac{dy}{dt} = a\ e^{at}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dv}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{a\ e^{at}}{-\ a\ e^{-at}} = -a\ e^{2at}$$

II.7. TURUNAN FUNGSI IMPLISIT

Untuk menentukan turunan dari fungsi-fungsi yang berbentuk implisit f (x, y) = 0 dapat diikuti pokok pikiran berikut :

Kedua ruas dari persamaan itu dianggap sebuah fungsi tersendiri dan kedua ruas itu didiferensialkan terhadap x, dengan mengingat bahwa y adalah sebuah fungsi dari x. Dari hasil ini selanjutnya dapat dipisahkan nilai dari y.

Contoh :

Tentukanlah $\frac{dy}{dx}$ dari :

a. $\sqrt{xy} = 1$

b. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

Jawab :

a. $\sqrt{xy} = 1$ atau $x^2y^2 = 1$

$x^{\frac{1}{2}} . \frac{1}{2} y^{\frac{1}{2}} . y' + \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{2}} = 0$

$$\frac{1}{2} y . (\frac{x}{y})^{\frac{1}{2}} + (\frac{y}{x})^{\frac{1}{2}} = 0 \; y' = -\frac{y}{x}$$

b. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

$$y' = \frac{\frac{2x}{a^2}}{\frac{2b}{b^2}} = -\frac{b^2 x}{a^2 y}$$

II.8. TURUNAN SEGERA LOGARITMA

Untuk menentukan turunan suatu fungsi yang berbentuk perkalian ganda dari beberapa fungsi seperti ny $= \frac{u^m v^n}{w^p}$, akan lebih mudah bila dipergunakan metode ini.

Pertama – tama diambil logaritma aslinya terhadap fungsi tersebut, kemudian kedua ruas didiferensialkan terhadap x, adalah perubahan bebas dari fungsi itu.

Jadi : ln y = m In u + n In v + …………………………..+ -p ln w

$$\frac{y'}{y} = \frac{mu'}{u} + \frac{nv'}{v} + \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots - \frac{pw'}{w}$$

atau

$$y' = y\,(\frac{mu'}{u} + \frac{nv'}{v} + \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots - \frac{pw'}{w}$$

$$= \frac{u^m v^n}{w^p} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (\frac{mu'}{u} + \frac{nv'}{v} + \dots . - \frac{pw'}{w}$$

Contoh :

Diferensialkanlah fungsi $y = \frac{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}(3-x)^{\frac{2}{3}}}{(5-x^3)^{\frac{5}{3}}}$

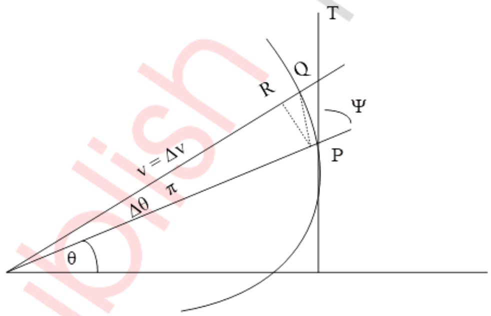
Jawab : $y' = \frac{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}(3-x)^{\frac{2}{3}}}{(5-x^3)^{\frac{5}{3}}}\left[\frac{-3x}{1-x^2} - \frac{2}{3(3-x)} + \frac{5x^2}{5-x^3}\right]$

II.9. TURUNAN FUNGSI DALAM KOORDINAT POLAR

Persamaan suatu garis lengkung dalam koordinat berbentuk r = f (θ) dengan koordinat polar kepada titik P. sedangkan λ adalah sudut antara tali busur PQ dan radius vektor OQ.

Jika PR λ QR, maka :

$$\text{tg } \lambda = \frac{PR}{QR} = \frac{PR}{OQ-OR}$$
$$= \frac{r \sin \Delta\theta}{r + \Delta r - r\cos\Delta\theta}$$
$$= \frac{r \sin \Delta\theta}{r\,(1-\cos\Delta\theta) + \Delta r}$$
$$= \frac{r\frac{\sin\Delta\theta}{\Delta\theta}}{r\frac{1-\cos\Delta\theta}{\Delta\theta} + \frac{\Delta r}{\Delta\theta}}$$



Gambar 2.6

Sekarang jika Q → P sepanjang kurva, Δθ → 0, 0Q → OP, PQ → PT dan jika Δθ → 0, $\lim_{\Delta\theta \to 0} \frac{\sin}{\Delta\theta} = 1$ dan $\lim_{\Delta\theta \to 0} \frac{1-\cos\Delta\theta}{\Delta\theta} = 0$ maka:

$$\lim_{\Delta\theta \to 0} \text{tg}\lambda = \lim_{\Delta\theta \to 0} \frac{r\frac{\sin\Delta\theta}{\Delta\theta}}{\frac{1-\cos\Delta\theta}{\Delta\theta} + \frac{\Delta r}{\Delta\theta}}$$

$\text{tg}\psi = \frac{r}{\frac{dr}{d\theta}} = \frac{r}{r'}$, atau $\text{tg}\psi = \frac{r}{r'}$

ψ = sudut antara radias vektor OP dan garis tangen pada kurva titik P

Sudut Inklinasi

Sudut inklinasi T yang dibentuk oleh garis tangen yang memalui P (r,θ) dengan sumbu OX dapat dihitung dengan rumus:

$$\mathrm{tg} = \frac{r\cos\theta + r'\sin\theta}{-r\sin\theta + r'\cos\theta}$$

Bukti: Dari gambar di atas dapat dilihat bahwa,

T $= \psi + \ \theta$ jadi :

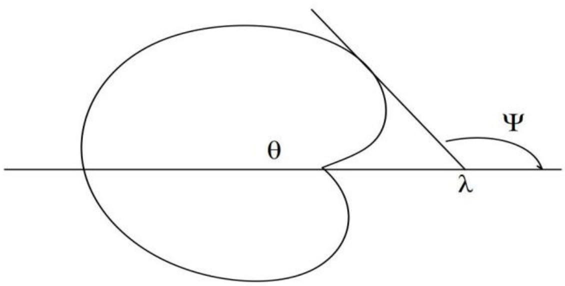
$$\mathrm{tg}\,T = \mathrm{tg}\,(\psi + \theta) = \frac{\mathrm{tg}\psi + \mathrm{tg}\theta}{1 - \mathrm{tg}\psi + \mathrm{tg}\theta}$$

$$= \frac{\frac{r}{r} + \frac{\sin\theta}{\cos\theta}}{1 - \frac{r}{r'}\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}$$

$$= \frac{r\cos\theta + r'\sin\theta}{-r\sin\theta + r'\cos\theta}$$

Contoh:

Tentukanlah miring tangen (sudut inklinasi) pada kurva r = 1 – cos θ di titik $\theta = \frac{\pi}{2}$



Pada $\theta = \frac{\pi}{2}, \sin\theta = 1, \cos\theta = 0$

$r = 1, r' = \sin\theta = 1$

$$\mathrm{tg}\,\Psi = \frac{r, \cos\theta + r'\sin\theta}{-r\sin\theta + r'\cos\theta}$$

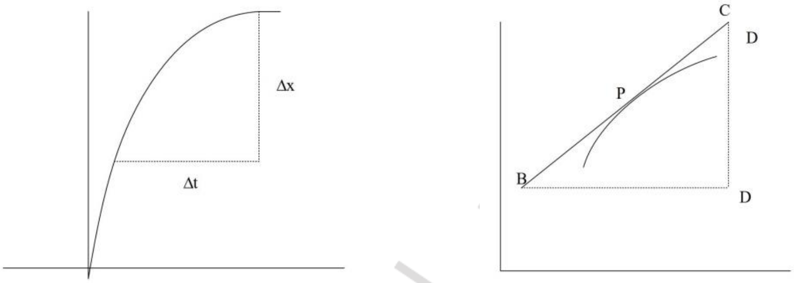
II.10. DIFERENSIAL GRAFIK

Seringkali data – data yang diberikan itu bukan berbentuk persamaan, akan tetapi diberikan hanya dalam grafik atau angka – angka seperti halnya dalam banyak gerak gelombang arus. Untuk itu Hitung Diferensial tak dapat digunakan. Kita akan menggunakan metode Diferensial grafik.

Pada gambar 2-7 dilukiskan suatu contoh pergerakan, di mana jarak perpindahan dinyatakan dengan x dan waktu dengan t, sehingga persamaan kurva adalah x = f (t). Kecepatan pada titik P menjadi V = $\lim_{\Delta\theta \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$

Dalam gambar 2-7 dilukiskan kembali dengan membentuk suatu tangen BC melalui P. Karena miring tangen sama dengan $\frac{dx}{dt}$ maka kecepatan pada titik P adalah v = $\frac{dx}{dt} = \frac{CD}{BD}$.

Inilah prinsip dasar dari Diferensial grafis.



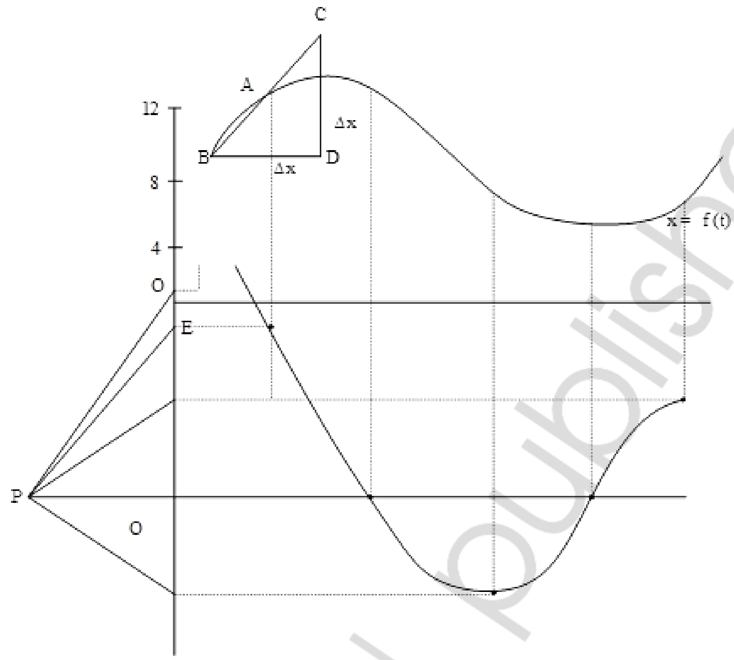
Gambar 2.7

Selanjutnya lukislah tangen di beberapa titik pada kurva yang diberikan, dan miringnya tangen akan sama dengan turunan fungsi pada titik – titik yang bersangkutan.

Sekarang mari kita lihat bagaimana metode ini dipergunakan: Gambar 2-7 melukiskan sebuah kurva x = f (t) yang harus diferensial. Pilih suatu titik pada kurva misalnya titik A, dan bentuk tangen BC. Miring tangen pada titik A sama dengan $\frac{CD}{BD}$.

Selanjutnya Gambarkan tangen untuk titik – titik yang lain pada kurva dan lukislah setiga – segitiga dengan cara yang sama seperti di atas.

Jika segitiga – segitiga itu mempunyai ambisi yang sama dengan BD, maka turunan dari fungsi asal di setiap titik akan ditentukan oleh nilai – nilai ordinat saja. Kemudian lukislah segitiga–segitiga itu pada sumbu t yang bersisian jadi segitiga BCD dari fungsi digambarkan oleh segitiga POE' dengan PO' = BD. Selanjutnya hanya diperlukan garis–garis sejajar dengan tangen yang dilukis dengan lengkap. Jarak PO' disebut jarak pol, dan panjangnya dinyatakan dengan h yang merupakan satuan kedua dari kurva kecepatan terhadap waktu titik A' yang diukur dari sumbu t menggambarkan kecepatan pada titik A.



Gambar 2.8

Metode ini jelas bentuk kelihatan dalam fungsi sinusoida (cobalah sebagai latihan)

II.11. TURUNAN FUNGSI TINGKAT TINGGI

Umumnya turunan pertama $\frac{dy}{dx} = f'(x)$ dari suatu fungsi $y = f'(x)$, juga merupakan sebuah fungsi dari x, justru itu dapat pula ditentukan turunan berikutnya yang disebut dengan turunan kedua dan dinyatakan dengan:

y” atau f” (x) atau dengan $(\frac{d^2y}{dx^2})$.

Dengan prinsip di atas itu muncul pula turunan yang lebih tinggi yang disebut dengan turunan ketiga, keempat ……………. ke – n, dan dinyatakan dengan:

y”, y (4) ……………………………y (n) atau
f” (x) f (4) (x) ……………………………, $f^{(n)}$ (x)

atau dengan:

$\frac{d^3y}{dx^3}, \frac{d^4y}{dx^4}$ ……………………………$\frac{d^ny}{dx^n}$

Contoh 1

Diberikan :

$$y = 5x^4 + 2x^3 - 10x + 2$$

Tentukanlah :

$$\frac{d^5y}{dx^5}$$

Jawab :

$$\frac{dy}{dx} = 20\,x^3 + 6x - 10$$
$$\frac{d^2y}{dx^2} = 60\,x^2 + 6$$
$$\frac{d^3y}{dx^3} = 120\,x$$
$$\frac{d^4y}{dx^4} = 120$$
$$\frac{d^5y}{dx^5} = 0$$

Contoh 2 :

Tentukanlah :

$y^{(n)}$ dari y = In x

Jawab :

$y' = x^{-1}$; $y' = - x^{-2}$
$y''' = - 1.2\ x^{-3}$; $y^{(4)} = 1.2.3\ x^{-4}$
‘
‘
‘
‘

$$y^{(n)} = \pm (n-1)\,!\ x^{-n} = (-1)^{n-1}\,(n-1)!\ x^{-n}$$

Contoh 3 :

Tentukanlah :

$\frac{d^2y}{dx^2}$ dari : x = t – sin t

y = 1 – sin t

Jawab :

$$x = t - \sin t \qquad \frac{dx}{dt} = 1 - \cos t$$

$$y = 1 - \cos t \qquad \frac{dy}{dt} = \sin t$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\sin t}{1 - \cos t} = \frac{2\sin\frac{1}{2}\,t\cos\frac{1}{2}\,t}{2\sin^2\frac{1}{2}\,t} = \operatorname{cotg}\frac{1}{2}\,t$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)\frac{dt}{dx} = \frac{d}{dt}\left(\operatorname{cotg}\frac{1}{2}\,t\right)\frac{dt}{dx}$$

$$= \frac{-\frac{1}{2}\operatorname{cosec}^2\frac{1}{2}\,t}{1 - \cos t} = \frac{1}{4}\operatorname{cosec}^4\frac{1}{2}\,t$$

atau :

$$\frac{dx}{dt} = x = -1\cos t \qquad x = \sin t$$

$$\frac{dy}{dt} = y = \sin t \qquad y = \cos t$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{xy - yx}{x^3}$$

$$= \frac{(1 - \cos t)\cos t - \sin t\,.\sin t}{(1 - \cos t)^3} = \frac{1}{(1 - \cos t)^2}$$

$$= \frac{1}{2\sin^2\frac{1}{2}\,t}$$

II.12. SOAL – SOAL LATIHAN

Diferensialkanlah fungsi–fungsi di bawah ini :

1. $y = kx$
2. $y = 3\,x^2$
3. $v = \frac{4}{3}\pi R^2$
4. $y = k$
5. $= 2t^3 - 3t^2 + t + 1$
6. $v = 5t^4 + 3t^3 - t + 2$
7. $y = \frac{2}{x^2}$

20. $w = \frac{3r+2}{2r+3}$
21. $f(x) = \text{In}\sqrt{a^2 + x^2}$
22. $f(x) = \text{In}\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$
23. $y = x\,\text{In}\,x$
24. $y = e^{2x}$
25. $f(x) = e^{\frac{1}{2}t}$

8. $h = \frac{10}{r^2}$

9. $p = \frac{1}{v}$

10. $y = \frac{k}{x^n}$

11. $y = 2x^3 + ax^2 + \frac{1}{x}$

12. $f(x) = \frac{1}{2x^2} + \frac{4}{\sqrt{x}} - 2\sqrt{x}$

13. $f(t) = \frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{6}{\sqrt[2]{t}}$

14. $y = \sqrt{1 + \sqrt{x}}$

15. $y = (a - x)^2 (2 - x)$

16. $y = (x - 1)\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$

17. $y = \frac{x+}{2x^2+3x+5}$

18. $y = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$

19. $s = \frac{t^2+2}{3-t^2}$

26. $f\left(\frac{1}{x}\right) = e^{\sin\frac{1}{2}t} \cos\frac{1}{2}t$

27. $f(t) = \frac{e^t-1}{e^t+1}$

28. $y = 10^x$

29. $y = a\sqrt{x^2 + a}$

30. $y = t^t$

31. $f(t) = t\sqrt{t}$

32. $f(t) = t\sqrt{t\frac{1}{t}}$

33. $y = x^x$

34. $y = \sin 5x$

35. $y = 2\sin^5 x$

36. $y = \frac{1}{3}tg^3 + tg\, x^3$

37. $y = e^{\sin} 2x$

38. $y = x \sin x$

39. $i = 100 \sin t$

40. $i = \cos wt$

41. $i = I_m \sin(20t - 0{,}2)$

42. $i = \frac{\sin\theta}{1-\cos 0}$

43. $v = 2\, Sin\,(50\, t - \pi)$

44. $v = 3\, ccs\, 2\pi\, ft$

45. $v = V_m \cos(2\, ft + \frac{\pi}{2})$

46. $v = V_m \cos\theta + IR \sin\theta$

47. $i = e^{wt}\, Sin\, 2\, wt$

48. $v = e^{20} Sin\,(30 - \frac{\pi}{3})$

49. $S = \frac{et}{Sin\, t}$

50. $S = \frac{2\,t}{\cos(10t-0{,}2)}$

51. $y = \ln \sin \frac{\sqrt{a+bx}}{b-ax}$

52. $y = xe\sqrt{\cos x^2}$

53. $y = \sqrt{x} \sec x$

54. $r = \frac{\cos\theta}{1+\sin\theta}$

55. $y = e^x (\cos x - \frac{\pi}{3})$

56. $y = x^2 (tg^2 x + \frac{\pi}{4})$

63. $y = \ln\sqrt{tgh\, 2x}$

64. $y = arctg\, \sinh x$

65. $y = 3\, arc\, sinh\, \frac{1}{2x}$

66. $y = arctg\, (\cos x)$

67. $y = 2\, arc\, \cos \frac{\sqrt{\cos 3x}}{\cos^3 x}$

68. $y = e^{ax} (a \cos bx + bsibx)$

69. $\begin{cases} x = \sin t - t\cos t \\ y = \cos t + t \sin t \end{cases}$

70. $\begin{cases} x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ y = \frac{2}{1+t^2} \end{cases}$

71. $\begin{cases} y = \ln(t+2) \\ x = \frac{1}{(1+t)^2} \end{cases}$

72. $\begin{cases} x = t \cos t \\ y = \sin t \end{cases}$

73. $xy + y^2 = 1$

74. $x^2 + y^2 = r^2$

75. $y^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{2}} = 1$

57. $y = \text{arc sin } 3x$
58. $y = \text{arc tg } \sqrt{x}$
59. $y = \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} - \text{arc sin } \frac{\pi}{2}$
60. $y = a^2 \text{ arc sin } \frac{x-a}{a}$
61. $y = \text{Sinh } \frac{x}{4}$
62. $y = \cosh^2 3x$
76. $e^{x+y} + e^{x-y} = 0$
77. $(\text{Sin})^y = y \sin^x$
78. $y = x^{\ln x}$
79. Tentukan $\frac{d^4y}{dx^4}$
80. Tentukan $y^{(n)}$ dari $y = \cos x$

---

81. Tentukan $f^{(n)}(x)$ dari $f(x) = \frac{1}{x^2}$
82. Tentukan $\frac{d^2x}{dx^2}$ dari $\begin{cases} x = \sin t - t\cos t \\ y = \cos t - t\sin t \end{cases}$
83. Perlihatkan bahwa $x^2 + y^2 = r^2$

    Hubungan $\left| \frac{y''}{1+y'^{2\;3}/_2} \right| = \frac{1}{r}$
84. Tentukan gradien pada grafik $y = \sin\theta$ di titik $\theta = \frac{\pi}{3}$

    Hitunglah gradien pada grafik fungsi berikut untuk nilai x yang diberikan di sebelah kanan.
85. $y = (2x + 5)(x - 2)$ $(x = 2)$
86. $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ $(x = 9)$
87. $y = x^2 - 4x + 3$ $(x = 2)$
88. $y = \frac{3x^2 - x^3}{x}$ $(x = 0)$
89. $y = (x^{\frac{1}{2}})$ $(x = 4)$
90. $y = \cos 2\pi x$ $(x = \frac{3}{4})$
91. Hubungan antara arus anoda I dan tegangan kisi-kisi V dari suatu tabung trioda diberikan oleh

$$I = 6 + 3v + \frac{1}{2}v^2$$

    Hitunglah :

    (a) Perubahan rata-rata arus anoda apabila tegangan kisi-kisi sama dengan 2 volt

    (b) Nilai v ketika $\frac{dI}{dv} = 1$
92. Suatu kumparan mempunyai induksi sendiri dari 4 H, dan tahanan 200 Ω. untuk kumparan ini dipergunakan tegangan sumber sebesar 100 volt. Arus sesaat i A, diberikan oleh:

$$i = \frac{E}{R}(1 - e^{-\frac{Rt}{L}})$$

Hitunglah :

(a) rata-rata tambahan arus pada saat sakelar terbuka

(b) rata-rata tambahan arus setelah 0,01 detik.

93. Suatu kapasitor bermuatan penuh dari 0,2 μF, antara plat terdapat tegangan sebesar 150 volt. Kemudian kapasitor dikosongkan melalui resistor dari 1,5 Ω. Apabila tegangan yang melalui plat pada setiap saat detik setelah rangkaian tertutup diberikan oleh:

$$v = V\, e^{-\frac{t}{RC}})$$

(a) Rata-rata tegangan yang hilang pada saat permulaan

(b) setelah 0,1 detik

94. Diketahui suatu arus bolak balik i = 50 sin 2 πft.

Hitunglah perubahan rata-rata arus setelah 0,01 detik apabila f = 50Hz

95. Suatu tegangan bolak balik diberikan oleh v = 100 sin (20t + $\frac{\pi}{3}$)

Hitunglah perubahan rata-rata tegangan itu setelah 0,02 detik.

96. Hitunglah nilai positif yang terkecil dari θ, untuk mana gradient dari grafik 2 sin θ + 4 cos θ sama dengan nol.

97. Tentukan koordinat suatu titik pada grafik y = cos2θ apabila gradientnya pertama kali mencapai 0,5

98. Tentukanlah *range* nilai dari θ pada grafik y = sin θ + cos θ yang mempunyai gradient negatif.

99. Suatu besaran yang bervariasi secara sinusoida diberikan oleh :

$$P = 10 \sin (wt + 0{,}1)$$

Tentukanlah ilai t apabila diketahui gradiennya sama dengan nol dan W = 100 π rad/detik

100. Jika i = 10 sin 2 wt dan v = 20 cos 2 wt, maka hitunglah nilai positif pertama dari t ketika i dan v mempunyai perubahan rata-rata yang sama, apabila W = 50 rad/detik.

BAB III

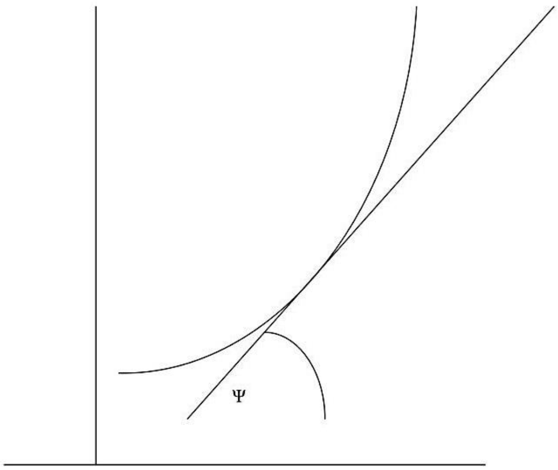
APLIKASI HITUNG DIFERENSIAL

Seperti telah diuraikan dalam Bab II di atas bahwa pengertian dan pemakaian dari $\frac{dy}{dx}$ dapat disimpulkan sebagai berikut:

1. $\frac{dy}{dx}$ berarti suatu ukuran kooperatif dari perubahan rata-rata antara dua buah Variabel yang saling berhubungan, misalnya; kesempatan pada perubahan rata-rata antara jarak dan waktu.
2. $\frac{dy}{dx}$ secara Grafik berarti target terhadap suatu kurva atau kemiringan garis singgung (gradien) pada titik singgung yang bersangkutan.

$$\text{Atau : } \frac{dy}{dx} = \text{tg } \Psi$$

Perlu dicatat di sini bahwa sudut Y adalah sudut yang terbentuk oleh garis singgung dengan sumbu x positif.



Gambar 3.1

III.1. INDUKTANSI

Tenggangan yang terjadi dalam suatu indikator berbanding lurus dengan rata-rata perubahan arus yang melalui indikator tersebut sedangkan arahnya berlawanan dengan arah arus.

Perubahan rata-rata arus = $\frac{di}{dt}$, dan tegangan yang dihasilkan dalam indikator adalah e, maka:

(1) $e = - k \frac{di}{dt}$

Nilai konstanta perbandingan k tergantung kepada sifat-sifat dari indikator, dan dalam hal individu V maka konstanta k itu disimbolkan dengan L.

Rumus (1) berubah menjadi bentuk

(2) $e = - L \frac{di}{dt}$

<u>Contoh :</u>

Jika arus I mA yang diberikan dalam suku-suku dari t sebagai $I = t^2 - 12$ t. dan setelah 10 detik menghasilkan tegangan 16 mV. Hitunglah:

(a) Konstanta perbandingan k.

(b) Tegangan setelah satu menit.

(a) $i = t^2 - 12\,t$

$\frac{di}{dt} = 2t - 12$

$(\frac{dy}{dx})_{10} = 2.10 - 12 = 8$

Dari $e = -k \frac{dy}{dx}$; diperoleh

$16 = -k \times 8$

k = 2 (numerik) V sendiri

(b) $(\frac{dy}{dx}) = 2.60 - 12 = 108$

Dan

$e = 2 \times 108$ mV = 216 mV

III.2. KAPASITANSI

Sifat-sifat yang sama seperti halnya dengan indikator, juga terdapat dalam sebuah kapasitas apabila diisi atau dikosongkan

Sebagaimana diketahui bahwa harus listrik itu tidak lain dalam perpindahan muatan yang terus menerus dan nilainya berbanding lurus dengan perpindahan rata-rata dari muatan tersebut.

Jadi:

(3) $i = k\,\frac{dq}{dt}$

Apabila suatu arus dipilih dalam Ampere dan muatan dengan Coulomb maka k = 1 dan rumus (3) menjadi:

(4) $i = \frac{dq}{dt}$

Perubahan muatan ini berbanding lurus pula dengan perubahan tegangan yang melalui kapasitor.

$dq = k\,dv$

Atau

$i\,dq = k\,dv$

(5) $i = k\,\frac{dv}{dt}$

Nilai k di sini juga tergantung kepada sifat-sifat dari kapasitor dan dilambangkan dengan huruf C.

(6) $i = c\,\frac{dv}{dt}$

<u>Contoh:</u>

Suatu tegangan v Volt diberikan dalam suku-suku dari t oleh $v = 16\ t^2$, dipergunakan untuk suatu kapasitor, dan ternyata setelah 1 detik menghasilkan arus sebesar 3,2 mA. Hitunglah:

(a) Kapasitor C
(b) Nilai arus setelah 2 detik.

(a) $V = 16\ t^2$

$\frac{dv}{dt} = 32\ t\ \left(\frac{dv}{dt}\right)_1 = 32$

Dari: $i = c\,\frac{dv}{dt}$

10^{-3} x 3,2 = c. 32

C = 100 mf

(b) i = 10^{-4} x 32t

i2 = 10^{-4} x 32.2

= 64.10^{-4}

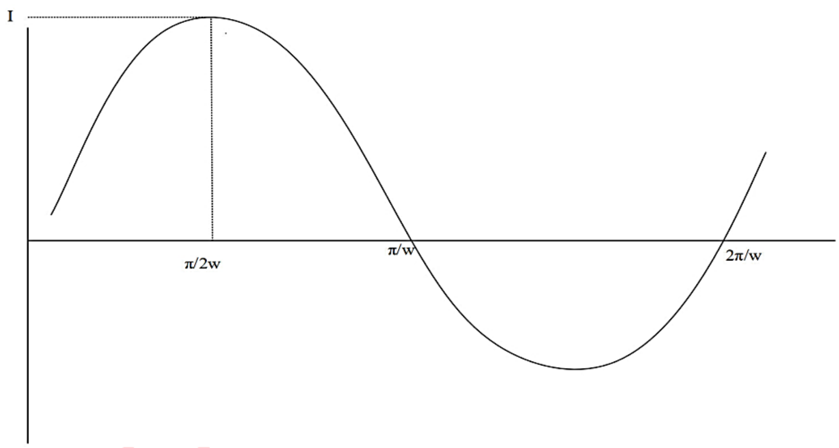
= 6.4 mA

III.3. ARUS BOLAK – BALIK

Dalam jilid I telah diperlihatkan bahwa sebuah vektor jari-jari yang berputar dengan kecepatan sudut konstan akan menghasilkan suatu bentuk gelombang sinusoida, yang menggambarkan suatu arus bolak-balik.

i = I_m sin wt atau tegangan bolak balik

v = V_m sin wt



Gambar 3.2

Induktansi dalam rangkaian arus bolak balik

Harus diingat bahwa suatu besaran yang dilukiskan dengan suatu lambang mempunyai arti dan istilah tersendiri.

Misalnya kita harus dapat dengan jelas membedakan antara dua jenis tenggangan, tegangan terpakai yang dilambangkan dengan V Volt dan tegangan yang disilakan dalam suatu indikator yang dilambangkan dengan e Volt.

Nilai sesaat dari tenggangan induksi e yang dihasilkan oleh suatu indikator diberikan oleh hukum Lenz:

(7) $e = - L \frac{di}{dt}$;

dan arus bolak balik diberikan oleh :

(8) i = Im sin wt

Dari (8) kita peroleh :

$\frac{di}{dt}$ = w I_m cos wt; dan hubungan (7)

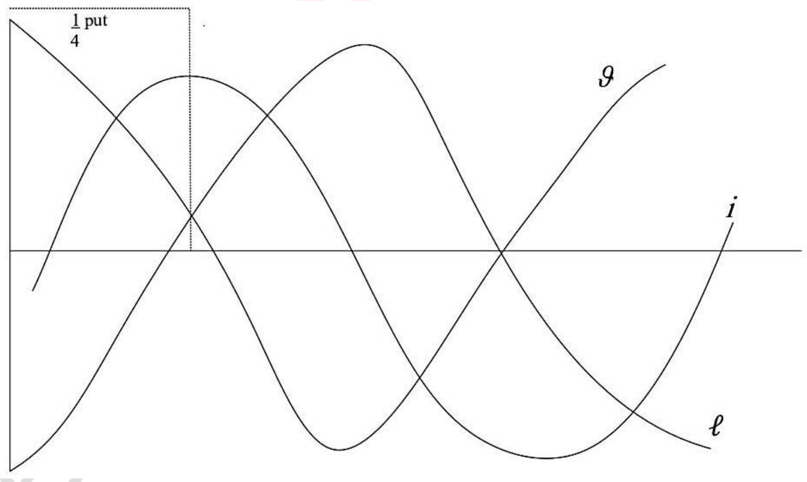
Menjadi :

(9) e = - Lw Im cos wt

Apabila tahanan dalam rangkaian diabaikan maka tegangan yang terpakai itu diserap seluruhnya oleh tegangan induksi e.
Jadi

(10) v = Lw Im cos wt

Secara grafik persamaan (8), (9), dan (10) dapat dilihat pada gambar 3-3 di bawah ini.



Gambar 3.3

Ada tiga kesimpulan penting yang ditarik dari gambar 3 – 3.

(1) i, e, dan v adalah besaran bolak balik sinusoida
(2) Grafik e adalah bayangan cermin dari grafik v
(3) Tegangan terpakai v memimpin arus sebesar ¼ putaran.

Dari hubungan (8) nilai arus maksimum = I_m, dan dari (10) nilai tegangan maksimum $V_m = I\ I_m$.

Jadi $\frac{V_m}{I_m}$ = wL; dan dengan menggunakan nilai efektif (lihat jilid III), kita peroleh:

$$\frac{V}{I} = \frac{V_m}{\sqrt{2}} : \frac{I_m}{\sqrt{2}} = w\ L = 2\ \pi\ fL.$$

Di mana w = 2 f

Besaran 2 π fL ini dinamakan reaktansi induktif, satuannya adalah Ohm dan dinyatakan dengan X_L; jadi :

(11) $X_L = 2\ \pi\ f\ L.$

Dari hubungan (11) ini jelas kelihatan bahwa reaktansi induktif X_L berbanding luas dengan frekuensi f.

<u>Kapasitas dalam rangkaian bolak balik</u>

Dalam fasal II-2 rumus (6) telah diperlihatkan hubungan i = c $\frac{dv}{dt}$; ini berarti bahwa nilai arus dalam rangkaian kapasitif tergantung kepada perubahan rata-rata tegangan terpakai v.

Tegangan bolak balik diberikan oleh :

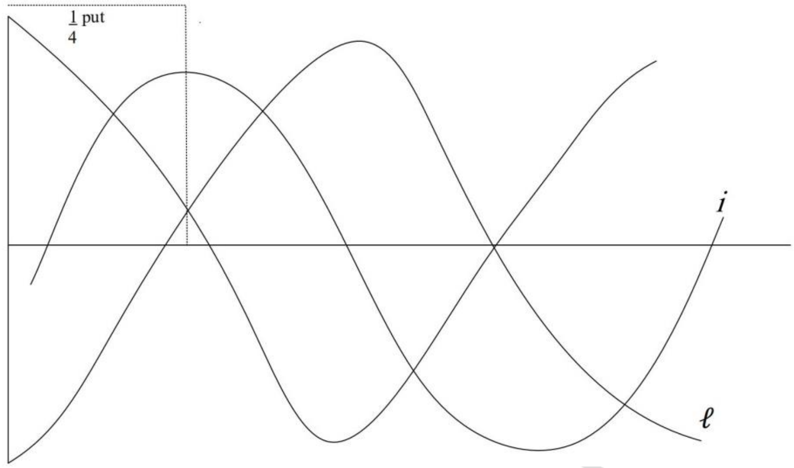
(11) $v = V_m \sin wt$; dan

$\frac{dv}{dt} = w\ V_m \cos wt$;

Maka :

(12) $i = C\ w\ V_m \cos wt$

Secara grafik hubungan (11) dan (12) dapat dilihat dalam gambar 3 – 4 di bawah ini.



Gambar 3.4

Dari hubungan (11) kita lihat nilai maksimum tegangan terpakai = V_m, dan dari hubungan (12) nilai maksimum arus = w C V_m.

Jadi $\frac{V_m}{I_m}$ = 1/wc ; dan dengan mempergunakan nilai efektif kita peroleh :

$$\frac{V}{I} = \frac{V_m}{\sqrt{2}} : \frac{I_m}{\sqrt{2}} = 1/wc = \frac{1}{2\,\pi\,fc}$$

Dalam hal ini besaran $\frac{1}{2\,\pi\,fc}$ dinamakan reaktansi kapasitif, dengan satuannya Ohm dan dinyatakan dengan X_C.

(13) $Xc = \frac{1}{2\,\pi\,fc}$

Dari rumus (13) ini kelihatan bahwa reaktansi kapasitif berbanding terbalik dengan frekuensi.

<u>Contoh :</u>

Suatu arus bolak balik diberikan oleh I = 40 sin 30 t, dipergunakan untuk suatu indikator dari 50π H. hitunglah tenggangan induksi setelah 0,01 detik,

i = 40 sin 30 t → $\frac{di}{dt}$ = 1200 cos 30 t

L = 5. 10^{-5} H; I_m = 40 dan w = 30

Dengan hubungan (10)

e = - L w I_m cos wt

= -5. 10^{-5}. 30.40 cos 30. 0,01

= -5. 10^{-5}. 30. 40. Cos 0,3

$= -6.\ 10^{-2} \cos 17,\ 190$
$= -57,3$ mV

III.4. JARAK KECEPATAN DAN PERCEPATAN

Suatu partikel P yang bergerak menurut suatu garis lurus/lengkung memenuhi hubungan:

$$S = f\ (t)$$

di mana:
S = jarak lintasan
T = waktu

Sedangkan kecepatan P pada waktu t adalah:

$$V = \frac{ds}{dt}\ (v = \textit{velocity})$$

V > O P bergerak dalam arah positif
V < O P bergerak dalam arah negatif
V = 0 P berada pada titik permulaan (titik maksimum)

Percepatan P pada waktu t ialah:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}\ (\ a = \textit{acceleration})$$

a > O percepatan
a < O perlambatan
a = O ; v = konstan

<u>Contoh 1 :</u>
Sebuah batu dilemparkan vertikal ke atas dengan kecepatan awal 112 m/detik, bergerak menurut kecepatan awal S 112 t – 16 t^2.

a. Hitunglah kecepatan dan percepatan pada t = 3
b. Titik tertinggi yang pernah dicapai batu.
c. Kapan batu berada pada ketinggian 96m.

Jawab:

$$v \frac{ds}{dt} = 112 - 32\ t\ ;\ a = \frac{dv}{dt} = -\ 32.$$

a. t = 3 --- $v_3 = 112 - 32.3 = 16$ dan $a_3 = -\ 32$

b. pada titik maksimum:
   $v = 112 - 32t$
   $t = 3{,}5$ dan
   $s = 112.3{,}5-16.$
   $(3{,}5)^2 = 196.$
c. $96 = 112\,t - 16\,t^2$ --- $t^2-7t + 6 = 0$
   $(t - 1)\,(t - 6) =$
   0 --- $t = 1; 6$

Batu mencapai ketinggian 96 m pada akhir detik pertama dan keenam. Pada t = 1 arah nya ke atas karena $v_1 > o$ dan pada t = 6 arahnya ke bawah karena $v_6 < o$.

III.5. GERAKAN MELINGKAR

Gerakan melingkar sepanjang suatu lingkaran dinyatakan dengan persamaan

$$\theta = f(t)$$

di mana:

θ = sudut pusat (dalam radial) yang dibentuk oleh radius vektor yang menghubungkan titik yang bergerak dengan pusat dengan pusat lingkaran pada waktu t.

Di sini kecepatan dan percepatan sudut pada waktu t masing-masing dinyatakan sebagai berikut :

$$W = \frac{d\theta}{dt} \text{ (w = the angulair velocity), dan}$$

$$\propto = \frac{dw}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2} \text{ (}\propto = \textit{the angulair acceleration}\text{)}$$

<u>Contoh :</u>

Sebuah roda berputar sebesar θ radial dalam waktu t detik menurut $\theta = 128\,t - 12t^2$ Tentukan kecepatan dan percepatan sudut pada akhir detik ke3.

Jawab:

$\theta = 128t - 12\,t^2$;

$W = \frac{d\theta}{dt} = 128 - 24\,t$; $L = \frac{dw}{dt} = -\,24$ red/det

Untuk t = 3 $W_3 = 128 - 24.3 = 56$ red/detik.

III.6. MAKSIMUM DAN MINIMUM

Fungsi Naik dan Fungsi Turun.

Untuk melukis kurva y = f(x), fungsi turunnya pun dapat pula membantu memberikan gambaran tentang bentuk kurva fungsi tersebut.

Satu fungsi y = f(x) dikatakan naik dalam internal a < x <b , jika setiap untuk kenaikan nilai y;

Jadi : Δx dan Δy keduanya positif.

Atau : Selanjutnya $\frac{\Delta y}{\Delta x} > 0$ dan lim $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$ 0

$$\Delta x \to 0 \; \Delta \, x$$

Jadi : Apabila dari suatu fungsi y = f(x) dalam interval a < x < b berlaku $\frac{dy}{dx} > 0$, maka dikatakan fungsi itu naik dalam interval tersebut fungsi y = f(x) dikatakan turun dalam interval a < x < b, jika untuk setiap kenaikan harga x selalu diikuti oleh pengurangan harga y, jadi Δ x > 0 dan Δ y < 0, selanjutnya $\frac{\Delta y}{\Delta x} < 0$ dan $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} < 0$

Jadi : Apabila dari suatu fungsi y = f(x) dalam interval a < x < b berlaku $\frac{dy}{dx}$ < O, maka dikatakan fungsi itu turun dalam interval tersebut.

Contoh :

Selidikilah naik turunnya fungsi :

$$F(x) = 1/3\, x^3 + x^2 - 6\, x - 5$$

Jawaban :

$$f(x) = x^2 + x - 6 = (x - 2)(x + 3)$$

Fungsi f(x) naik, jika f (x) >0 atau

$$(x - 2)(x + 3) > 0$$

$$X > 2 \text{ dan } x < -3$$

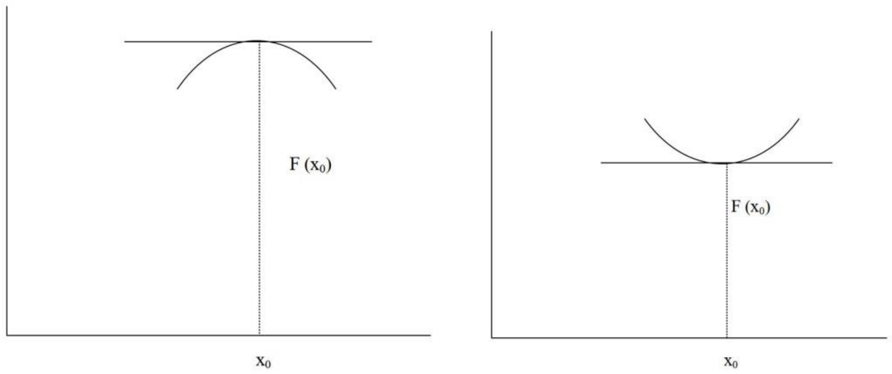
Fungsi f(x) turun, jika f(x) < 0 atau

$$(x - 2)(x + 30$$

$$-3 < x < 2$$

Suatu fungsi y = f(x) dikatakan mencapai harga maksimum pada x = x_o apabila f(x) lebih besar dari pada harga f(x) di sekitar x = x_o

Pada kedua titik ekstrem tersebut (titik maksimum dan minimum) tangen setara dengan sumbu x; jadi $\propto$ = O atau $(\frac{dy}{dx})$ = tg L = 0



Gambar 3.5

Sebagian busur kurva y = f (x) dikatakan cembung (konveks) bila $\frac{dy}{dx}$ naik jadi:
Untuk

$x_2 > x_1$ --- $\quad$ f ‘ $(x_2) >$ f ‘ (x_1)

atau

$X_2 - x1 > 0$ $\quad$ f ‘ (x_2) – f ‘ $(x_1) > 0$

$$\frac{f'(x_2) - f\prime(x_1)}{x_2 - x_1} > 0 \text{ dan } \lim_{x_2 - x_1 \to 0} \frac{f'(x_2) - f\prime(x_1)}{x_2 - x_1} \geq 0$$

Syarat kecembungan menjadi $\frac{d^2y}{dx^2} > 0$ (kanan titik B).

Sebagai busur kurva y = f(x) dikatakan cekung (konkaf) bila $\frac{dy}{dx}$ turun jadi :
Untuk

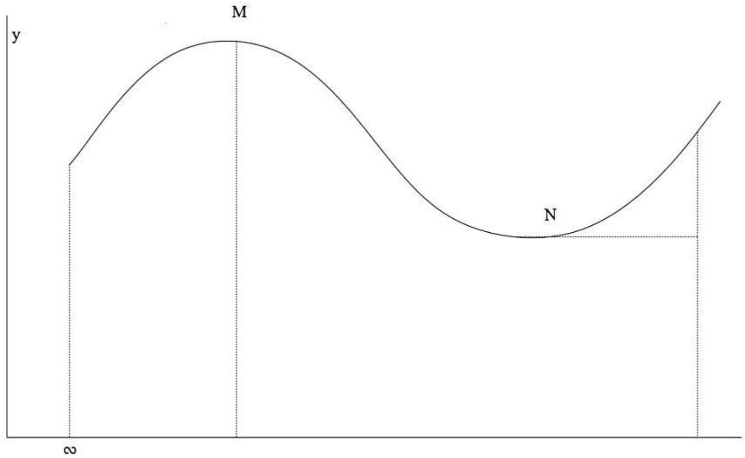
x2 > x1 --- $\quad$ f ‘ (x2) > f ‘ (x1)

atau

x2 – x1 > 0 $\quad$ f ‘ (x2) – f ‘ (x1) < 0

$$\frac{f'(x_2) - f\prime(x_1)}{x_2 - x_1} > 0 \text{ dan } \lim_{x_2 - x_1 \to 0} \frac{f'(x_2) - f\prime(x_1)}{x_2 - x_1} \geq 0$$

Syarat kecekungan menjadi $\frac{d^2y}{dx^2} \leq$ o (kiri titik B)



Gambar 3.6

Titik peralihan dari busur yang konek ke busur konkaf atau sebagainya disebut titik balik (*joint of inflection*). Untuk titik ini berlaku $\frac{d^2y}{dx^2}$ = o (titik B).

<u>Kesimpulan:</u>

Jika untuk suatu titik x = xo pada kurva y = f(x) dalam interval $a < x < b$, berlaku :

1. $\frac{dy}{dx} > 0$ fungsi f(x) naik.
2. $\frac{dy}{dx} < 0$fungsi f(x) turun
3. $\frac{dy}{dx} = 0$ fungsi mencapai harga ekstrem dan apabila
   $\frac{d^2y}{dx^2} < 0$ ekstrem itu maksimum.
   $\frac{d^2y}{dx^2} > 0$ ekstrem itu minimum.
4. $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ $\{x_0 , f(x_0)\}$ titik balik.
5. $\frac{dy}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2} = \ldots.. = \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} = 0$ dan
   $\frac{d^ny}{dx^n} \neq 0$ maka

Untuk n genap --- fungsi mencapai ekstrim.

$$\frac{d^ny}{dx^n} < 0 \text{ ekstrem}$$

Maksimum

$$\frac{d^n y}{dx^n} > 0 \text{ ekstrem}$$

Maksimum

Untuk n ganjil --- $\{x_0, f(x_0)\}$ titik-titik

<u>Contoh :</u>

Tentukan harga-harga ekstrem, titik-titik ekstrem dan titik balik dari

$$y = 1/6\, x^3 - x^2 + 2\ .$$

Jawab :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}x^2 - 2x = x(\frac{1}{2}x - 2) = 0$$

$$x = 0,\ x_2 = 4$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}\, x - 2\ (\frac{d^2y}{dx^2})\ x = 0 = -2\ 0$$

Ekstra maksimum.

Harga maksimum : $y = 2$

Titik maksimum : $(0,2)$

$$\frac{(d^2y}{dx^{2x}2} = 4 = 2 > 0 \text{ ekstrem itu minimum.}$$

Harga minimum fungsi $y = -\frac{10}{3}$

Titik minimum $(4, -\frac{10}{3})$

Untuk titik balik $\frac{d^2y}{dx^2} = x - 2 = 0\ x = 2$ dan

$$F\ (2) = -\ 2/3$$

Jadi $(2, -\ 2/3)$ adalah titik balik yang diminta.

<u>Contoh 2:</u>

Lukis kurva dari $f(x) = 1/3\, x^3 - x^2 + 1$

Lukis juga kurva dari f ‘ (x) dan f’’ (x)

Dalam satu gambar dan sebutkan hubungan antara ketiga kurva tersebut.

Jawab :

$$f\ (x) = 1/3\, x^3 - x^2 + 1 \quad f\,‘\ (x) = x^2 - 2x = x(x-2)$$

$$F\,‘\ (x) = 2x - 2 = 2(x-1)$$

F ‘ (x) $>$ 0 → x(x-2) $>$ 0

x $<$ 0 dan x$>$ 2 fungsi mendaki

F ‘ (x) $<$ 0 → x x $(x-2) < 0$ Fungsi menurun

F ‘ (x) = 0 x 0 dan x = 2 fungsi mencapai Ekstrem

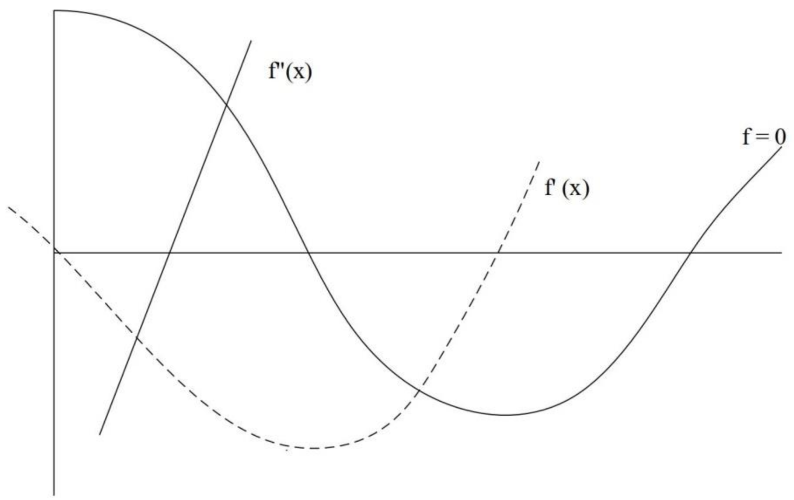
F” (x) $_{x=0}$ =- 2 $<$ 0 ekstrim maksimum dan f(0) = 1

F” $_{x=2}$ = -2 $>$ 0 ekstrim minimum dan f(2) = -1/3

F” (x) = 0 → 2x – 2 = 0 → x = 1 dan F(1) = 1/3

Titik balik $(1,\frac{1}{3})$

Titik potong f’ (x) dengan sb. x sama dengan absisnya titik ekstrem. Titik potong f’ (x) dengan sb. x sama dengan absisnya titik balik.



Gambar 3.7

III.7. PROBLEM YANG BERKAITAN DENGAN HARGA EKSTREM

Contoh 1:

Sebuah kumparan dari plat baju harus dibuat berbentuk silinder dengan volume 1. Tentukan dimensi kumparan agar bahan yang dipergunakan seminimal mungkin.

Jawab:

Umpamakan jari-jari kumparan R dan tingginya H. Luas permukaan adalah :

$$A = 2\pi RH + 2\pi R^2$$

Volume kumparan :

$$V = \pi R^2 H = 1$$

$$H = \frac{1}{\pi R^2}$$

$$A \ = 2\,\pi\,R\,\frac{1}{\pi R^2} + 2\,\pi\,R^2$$

$$= 2\,(\frac{1}{R} + \pi\,r^2)$$

$$\frac{dA}{dR} = 2\,(-R^2 + 2\,\pi\,R) = 0;\ R^{-2} = 2\,\pi\,R$$

$$R^3 = \frac{1}{2\pi}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2\pi}} = 5{,}42\text{cm}$$

$$= 10{,}82$$

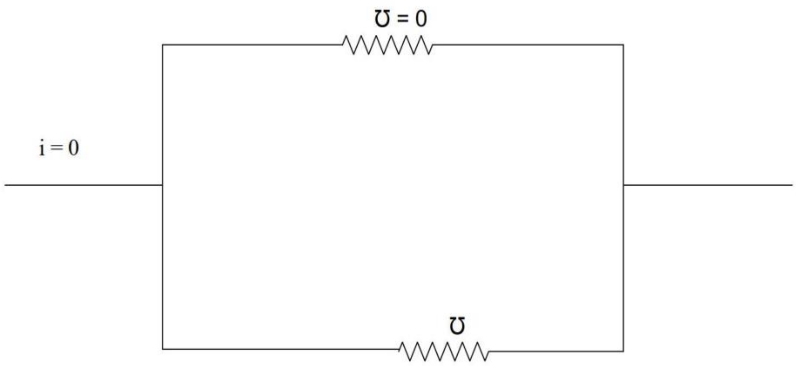
$$\frac{d^2A}{dR^2} = 2\,(R^{-3} + 2) > 0 \text{ ---- ekstrim minimum.}$$

<u>Contoh 2.</u>

Suatu arus sebesar i_o dialirkan melalui rangkaian dengan tahanan r_o ohm. Jika tahanan ini dihubungkan paralel dengan tahanan lain sebesar r Ohm, maka tentukanlah nilai r sehingga tenaga yang dihasilkan dalam tahanan paralel itu maksimum.

Jawab :

Misalkan I arus yang mengalir dalam tahanan paralel. Tenaga yang dihasilkan dalam tahanan r adalah : $P = ri^2$. Arus dalam tahanan r_o menjadi $i_o - i$.



Gambar 3.8

Kesamaannya : (karena hubungan paralel)

$$i1 - (i_o - i)\, r_o$$

atau

$$i = \frac{r_o\, i_o}{r + r_o}$$

Jadi : $P = ri^2 = \frac{r r_0^2\, 1_0^2}{(r+r_0)^2}$ mencapai maksimum

$$\frac{dp}{dr} = \frac{(r+r_0) r_0^2\, i_0^1 - 2\, r r_0^2\, i_0^2}{(r+r_o)2} = 0,$$

Memberikan : $r = r_o$

III.8. SOAL-SOAL LATIHAN

1. Seorang yang tingginya 160 cm berjalan menghampiri tiang lampu yang berada pada ketinggian 6,4 m dengan kecepatan rata-rata 120 cm per detik. Tentukanlah kecepatan perubahan bayang-bayang orang tersebut.
2. Tentukanlah persamaan tangen dan normal pada grafik $x^2 - y^2 = 7$ di titik (4, -3)
3. Suatu arus bolak balik diberikan oleh:

   $$i = 100 \sin 200\, t$$

4. Suatu tegangan bolak balik $V = V_o \cos wt$ melalui suatu kapasitor dengan kapasitas C fared. Tentukanlah pernyataan untuk arus $I = C\,\frac{dv}{dt}$ pada setiap saat dalam suku-suku dari V_o, w, c dan t, dan Tentukan pula nilai puncak dari arus tersebut.
5. Suatu tegangan bolak balik diberikan oleh :

   $$V = 50 \sin 100\, t$$

   Dipergunakan untuk kapasitor dari 100/F hitunglah tegangan induksi setelah 0,01 detik.
6. Suatu arus bolak balik diberikan oleh :

   $$I = 400 \sin 300\, t$$

   Dipakai untuk suatu indikator dari 5 π H.
   Hitunglah dengan induksi setelah 0,02 detik.

7. Suat tegangan bolak balik diberikan oleh :

$$V = 20 \sin 50 t$$

Hitunglah perubahan rata-rata tegangan tersebut ketika t = 0,1 detik.

8. Gambar kan lah grafik V = 10 sin 40 t untuk nilai-nilai t dari 0 ke 0,16 detik dengan interval 0,02 detik. Hitunglah rata-rata perubahan tegangan setelah 0,02 detik dengan:

   (a) Grafik (b) Perhitungan

9. Suatu induktansi L henry dan tahanan R Ohm, dihubungkan seri dalam suatu rangkaian. Pada saat t detik arus yang melalui rangkaian ini adalah:

$$i = 4 \sin wt$$

Suatu tegangan $L\frac{di}{dt}$ diperlukan untuk menahan kembalinya tegangan menuju induktansi. Tuliskanlah pernyataan untuk tegangan total yang melalui rangkaian pada saat ini.

10. Panjang kabel dari ayunan listrik pada waktu t detik ditentukan oleh S = $4^{\,t4} - 44^{\,t3} + 144^{t2}$ kapankah ayunan itu membalik. ?

11. Suatu loncatan api listrik dalam waktu t detik muncul dari suatu travo setinggi h n, dan

$$H = 100 t - 16 t2$$

Hitunglah :

(a) Kecepatan loncatan api dari trafo.
(b) Waktu ketika api mencapai ketinggian maksimum
(c) Tinggi maksimum yang pernah dicapai
(d) Kecepatan loncatan pada saat permulaan.

12. Sebuah roda berputar melalui sudut θ radial dengan persamaan

$$\theta = 128 t - 12 t2$$

Tentukanlah kecepatan dan percepatan sudut pada akhir detik ke 3.

13. Selidikilah turun naiknya fungsi $y = 3x + (x + 2)^{3/5}$ dan Tentukan juga titik baliknya.
14. Seperti soal 13. $F(x) = x - ¼ x^4$
15. Hitunglah nilai maksimum dari fungsi $y = 4x - x^2$
16. Hitunglah nilai maksimum dan nilai dari fungsi $y = x^3 - 12x + 3$
17. Selidikilah ekstrem fungsi $y=x^2 + \frac{250}{x}$

18. Seperti soal 17. Y = $\frac{x^2-x+2}{x^2-2x+2}$
19. Tentukanlah suatu titik minimum pada grafik $x = 2t^2 - 1$ dan $y = 3t^3 - t$.
20. Hasil kali dua buah bilangan positif = 20
    Tentukanlah bilangan-bilangan tersebut jika:
    a. Hasil kalinya maksimum.
    b. Jumlah kuadrat kedua bilangan itu maksimum.
    c. Hasil kali kuadrat dari bilangan pertama dan pangkat tiga bilangan kedua maksimum.
21. Dua buah titik tetap A dan B yang terletak berbelah di antara dua jenis media optik. Tentukanlah sebuah titik P pada batas kedua media tersebut, sehingga penyinaran dari A ke B berlangsung secepat mungkin.
22. Hitunglah dimensi suatu plat dengan luas maksimum yang dapat dipotong dari sebuah. Plat yang berbentuk parabola y = 4 px yang dipotong oleh garis x = a.
23. Hitung tinggi tabung dengan volume maksimum yang dapat dibuat dalam sebuah bola dengan jari-jari R.
24. Ongkos produk x set pesawat t.v berwarna “Sharp” per hari adalah Rp. ($\frac{1}{4}x^2$ + 35+25), sedangkan harga penjualan per setiap Rp(50 - $\frac{1}{2}$x)
    a. Berapa sekah harus diproduksi per hari untuk mendapatkan untuk yang sebesar-besarnya.
    b. Perlihatkanlah bahwa biaya produksi per setnya relatif murah.
25. Suatu tipe dari *load speaker* mobil harus dibuat sedemikian rupa sehingga volume bagian dalamnya 0.5 dm^3. Beberapa incikah ukuran yang diperoleh agar daun membran yang diperlukan sedikit mungkin.

DAFTAR BACAAN

Dorothy. *Modern Mathematics for Engineers*. New Yersey: Prenstice Hall.

Edwin C. Lowenberger Ph.D. *Electronic Circuits*, New York: Mc. Craw Hill Company.

Hreyzig, Erwin. *Advanced Engineers Mathematics*. New York: Yohn Wiley and Sons.

Lake Y, Yest, Nodem. *Applied Mathematics for Electronics*. New Jersey: Frentice Hall.

Nunz, Sham. *Electronics Mathematics*. New York: Mc. Craw Hill Bool Company.

Smithson. *Mathematics for Electrical and Telecommunications*. UK: Mc. Craw Hill Company.

Yoseph. A, Edminster. *Elektric Ciscuits*. New York: Mc. Craw Hill Company.